

第3章 論理演算

3.1 ブール代数

基本的な論理演算には論理積(AND)・論理和(OR)・否定(NOT)の3つがあり、ブール代数から定義されます。ブール代数では、命題(正しいか正しくないかはっきり表せるもの)に対して正しいか正しくないかということだけを問題とします。命題が正しいとき真(true)であるといい、正しくないとき偽(false)であるといいます。特に、情報科学の分野では真と偽を1と0で表します。また、ある命題が与えられたとき命題自身を A や B などの文字を使って表しますが、これを命題変数といいます。例えば、

「ブリは魚である」($= A$)

という命題は正しいので、

$$A = 1$$

と表します。

命題は、1つ以上の命題に対してある演算(論理演算)を定義することによって新しい命題を得ることができます。実際、 n 個の命題を命題変数 $A_1, A_2, \dots, A_n$ で表せば、ある演算を行う論理関数 F によって新しい命題を $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ で表すことができます。詳しく述べれば、命題変数は1か0の値しか取らないので、この関数は 2^n 通りの変数の組み合わせから1又は0のどちらかに対応させる演算を行います。

それでは論理積・論理和・否定の論理演算について詳しく見ていきましょう。同時に各論理演算を記述するための論理演算記号を挙げておきます。

論理積 F' を論理積を表す論理関数とし、命題変数 A, B に対して新しい命題を $X = F'(A, B)$ とします。このとき、論理積は以下によって定義されます。

$$X = F'(A, B) = \begin{cases} 1, & A = 1 \text{ かつ } B = 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

また、論理積を表す論理演算記号 $\cdot$ を用いて $X = A \cdot B$ と記述します。

論理和 F'' を論理和を表す論理関数とし、命題変数 A, B に対して新しい命題を $X = F''(A, B)$ とします。このとき、論理和は以下によって定義されます。

$$X = F''(A, B) = \begin{cases} 1, & A = 1 \text{ または } B = 1 \\ 0, & \text{それ以外 } (A = 0 \text{ かつ } B = 0) \end{cases}$$

また、論理和を表す論理演算記号 $+$ を用いて $X = A + B$ と記述します。

否定 F''' を否定を表す論理関数とし、命題変数 A に対して新しい命題を $X = F'''(A)$ とします。このとき、否定は以下によって定義されます。

$$X = F'''(A) = \begin{cases} 1, & A = 0 \\ 0, & A = 1 \end{cases}$$

また、否定を表す論理演算記号 $\neg$ を用いて $X = \neg A$ と記述します。

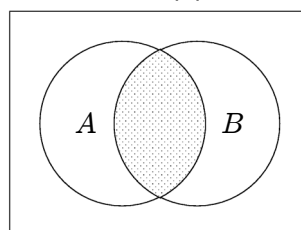
論理演算の論理関係を真理値表やベン図を用いて理解しましょう。1つの命題変数は1または0のいずれかを取ります。そこで、取り得る全ての組み合わせに対する演算結果をまとめて表や図で表します。これが真理値表やベン図です。なお、ベン図では1になる部分を塗りつぶします。

論理積

真理値表

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ベン図

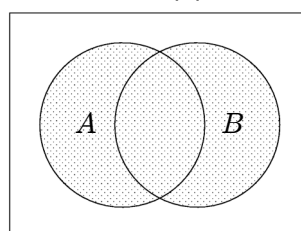


論理和

真理値表

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ベン図



否定

真理値表

A	X
0	1
1	0

ベン図

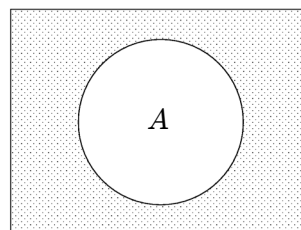


図 3.1: 真理値表とベン図

情報科学の分野では、論理積・論理和・否定に加えて否定積(NAND)・否定和(NOR)・排他的論理和(XOR)の3つの論理演算をよく使用します。なお、新しく加えた3つの論理演算は以下のように定義されます。

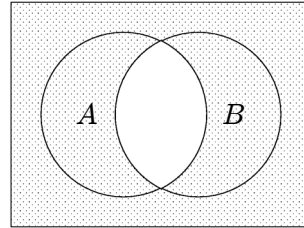
否定積

$$X = \overline{A \cdot B} = A \downarrow B$$

真理値表

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ベン図



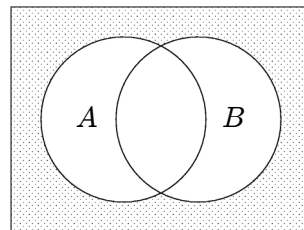
否定和

$$X = \overline{A + B} = A \uparrow B$$

真理値表

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ベン図



排他的論理和

$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$$

真理値表

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ベン図

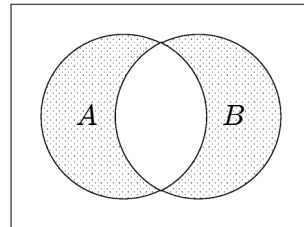


図 3.2: 否定積・否定和・排他的論理和

3.2 基本公式

基本的な論理演算を理解したところで、論理演算に関する基本公式と証明方法について学習しましょう。最初に注意しなければならないことは、論理演算にも四則演算のように演算順序があるということです。論理積・論理和・否定および括弧には次のような演算順序があります。

括弧	→	否定	→	論理積	→	論理和
高		→	優先順位	→		低

論理演算に関する基本公式には次のようなものがあります。

$\overline{\overline{A}}$		2重否定
$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$	交換則
$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	結合則
$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	分配則
$A + A = A$	$A \cdot A = A$	べき等則
$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	ド・モルガンの定理
$A + 0 = A$	$A \cdot 1 = A$	
$A + 1 = 1$	$A \cdot 0 = 0$	
$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$	
$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B) = A$	
$A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$	
$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	

表 3.1: 論理演算の基本公式

証明は、命題変数を取り得る全ての組み合わせに対して等式の両辺の値が同じになればよいので、真理値表を描くことによって証明できます。例えば、ド・モルガンの定理 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ の証明は、次の真理値表を描くことで完了します。なお、慣れるまでは $A + B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ を求めてから

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

表 3.2: ド・モルガンの定理 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ の証明

$\overline{A + B}$ や $\overline{A} \cdot \overline{B}$ を計算すると誤りが少なくなります。

例題 1 論理演算に関する等式 $A \cdot (A + B) = A$ を証明しなさい。

解答例 (証明)

A	B	$A + B$	$A \cdot (A + B)$	A
0	0	0	$0 \cdot 0 = 0$	0
0	1	1	$0 \cdot 1 = 0$	0
1	0	1	$1 \cdot 1 = 1$	1
1	1	1	$1 \cdot 1 = 1$	1

例題 2 論理演算に関する等式 $A \cdot \overline{A} = 0$ を証明しなさい。

解答例 (証明)

A	$\overline{A}$	$A \cdot \overline{A}$	0
0	1	$0 \cdot 1 = 0$	0
1	0	$1 \cdot 0 = 0$	0

問題 1 論理演算に関する等式 $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$ を証明しなさい。

問題 2 論理演算に関する分配則 $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ を証明しなさい。

問題 3 論理演算に関するド・モルガンの定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ を証明しなさい。

問題 4 論理演算に関する等式 $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$ を証明しなさい。

3.3 基本的な論理演算

この節では、論理積・論理和・否定が基本的な論理演算であることを簡単に述べます。

最初に命題変数が 1 つの場合について考えます。このとき、元の命題変数 A の値と新しい命題 $F(A)$ の値の組み合わせによって 4 通りが考えられます。まとめると次のような表を得ることができます。論理関数は F_0, F_1, F_2, F_3 のいずれかになります。 F_1 と F_2 は A の関数となって否定のみで表すことができ、 F_0 と F_3 は 0 と 1 に固定されています。

次に命題変数が 2 つの場合について考えます。命題変数が 1 つの場合にならって、元の命題変数 A, B の値と新しい命題 $F(A, B)$ の値の組み合わせを考えると次の表を得ます。表より、2 変数の場合も論理関数は $F_0, F_1, \dots, F_{15}$ のいずれかになり、論理積・論理和・否定によって全ての関数を表すことができます。

一般に多変数の場合も論理積・論理和・否定で全ての関数を表すことができます。証明は帰納法を用います。

A	0	1	論理式
$F_0(A)$	0	0	0
$F_1(A)$	0	1	A
$F_2(A)$	1	0	$\overline{A}$
$F_3(A)$	1	1	1

表 3.3: 1 変数の論理関数

A	0	0	1	1	論理式
B	0	1	0	1	
$F_0(A, B)$	0	0	0	0	0
$F_1(A, B)$	0	0	0	1	$A \cdot B$
$F_2(A, B)$	0	0	1	0	$A \cdot \overline{B}$
$F_3(A, B)$	0	0	1	1	A
$F_4(A, B)$	0	1	0	0	$\overline{A} \cdot B$
$F_5(A, B)$	0	1	0	1	B
$F_6(A, B)$	0	1	1	0	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$
$F_7(A, B)$	0	1	1	1	$A + B$
$F_8(A, B)$	1	0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} = A \downarrow B$
$F_9(A, B)$	1	0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$
$F_{10}(A, B)$	1	0	1	0	$\overline{B}$
$F_{11}(A, B)$	1	0	1	1	$A + \overline{B}$
$F_{12}(A, B)$	1	1	0	0	$\overline{A}$
$F_{13}(A, B)$	1	1	0	1	$\overline{A} + B$
$F_{14}(A, B)$	1	1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} = A \mid B$
$F_{15}(A, B)$	1	1	1	1	1

表 3.4: 2 変数の論理関数