

問題 1 論理演算に関する等式 $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$ を証明しなさい。

問題 2 論理演算に関する分配則 $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$ を証明しなさい。

問題 3 論理演算に関するド・モルガンの定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ を証明しなさい。

問題 4 論理演算に関する等式 $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$ を証明しなさい。

3.3 基本的な論理演算

この節では、論理積・論理和・否定が基本的な論理演算であることを簡単に述べます。

最初に命題変数が 1 つの場合について考えます。このとき、元の命題変数 A の値と新しい命題 $F(A)$ の値の組み合わせによって 4 通りが考えられます。まとめると次のような表を得ることができます。論理関数は F_0, F_1, F_2, F_3 のいずれかになります。 F_1 と F_2 は A の関数となって否定のみで表すことができ、 F_0 と F_3 は 0 と 1 に固定されています。

次に命題変数が 2 つの場合について考えます。命題変数が 1 つの場合にならって、元の命題変数 A, B の値と新しい命題 $F(A, B)$ の値の組み合わせを考えると次の表を得ます。表より、2 変数の場合も論理関数は $F_0, F_1, \dots, F_{15}$ のいずれかになり、論理積・論理和・否定によって全ての関数を表すことができます。

一般に多変数の場合も論理積・論理和・否定で全ての関数を表すことができます。証明は帰納法を用います。

A	0	1	論理式
$F_0(A)$	0	0	0
$F_1(A)$	0	1	A
$F_2(A)$	1	0	$\overline{A}$
$F_3(A)$	1	1	1

表 3.3: 1 変数の論理関数

A	0	0	1	1	論理式
B	0	1	0	1	
$F_0(A, B)$	0	0	0	0	0
$F_1(A, B)$	0	0	0	1	$A \cdot B$
$F_2(A, B)$	0	0	1	0	$A \cdot \overline{B}$
$F_3(A, B)$	0	0	1	1	A
$F_4(A, B)$	0	1	0	0	$\overline{A} \cdot B$
$F_5(A, B)$	0	1	0	1	B
$F_6(A, B)$	0	1	1	0	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$
$F_7(A, B)$	0	1	1	1	$A + B$
$F_8(A, B)$	1	0	0	0	$\overline{A} \cdot \overline{B} = A \downarrow B$
$F_9(A, B)$	1	0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$
$F_{10}(A, B)$	1	0	1	0	$\overline{B}$
$F_{11}(A, B)$	1	0	1	1	$A + \overline{B}$
$F_{12}(A, B)$	1	1	0	0	$\overline{A}$
$F_{13}(A, B)$	1	1	0	1	$\overline{A} + B$
$F_{14}(A, B)$	1	1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} = A \mid B$
$F_{15}(A, B)$	1	1	1	1	1

表 3.4: 2 変数の論理関数

この節の前半で述べたように、論理積・論理和・否定で全ての論理演算を構成することができ、このような演算の組を**万能演算系**といい、特に万能演算の組が独立なものを**最小万能演算系**といいます。例えば、ド・モルガンの定理を用いれば

$$A \cdot B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

であるから、論理積を論理和と否定で表すことができ、従属部分の論理積を除いた論理和と否定の組は最小万能演算系となります。

このことは、最小万能演算系で全ての演算を構成することができるので、次章の論理回路を構成する上で最小万能演算系を実行する回路があれば必要かつ十分であるといえます。実際のコンピュータでは、1つの演算で最小万能演算系となる否定積によって論理回路が構成されています。なお、否定積が最小万能演算系であることを証明するには、論理積と否定を否定積で書き表すか、論理和と否定を否定積で書き表します。

例題 1 論理積と否定を否定積で書き表し、否定積が最小万能演算系であることを証明しなさい。

解答例 (証明) べき等則 $A = A \cdot A$ より

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{A \cdot A} = A | A \\ A \cdot B &= \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{A | B} = \overline{(A | B) \cdot (A | B)} = (A | B) | (A | B)\end{aligned}$$

問題 1 論理和と否定を否定積で書き表し、否定積が最小万能演算系であることを証明しなさい。

問題 2 否定和が最小万能演算系であることを証明しなさい。

問題 3 排他的論理和は最小万能演算系となりうるかチェックしなさい。