

第9章 C言語 応用編

9.1 連立1次方程式

科学分野で取り扱う問題には、連立1次方程式を解くことに帰着されるものが数多くあります。未知数が少なければ手計算でも正確に計算できますが、実際に扱う未知数の数は非常に多く、コンピュータを用いた数値計算が必要不可欠となります。この章では、このような手計算では困難な連立1次方程式をコンピュータを用いて計算する方法を学習します。

この章を通して扱う連立1次方程式は、問題を簡単にするため、 n 個の未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を持つ n 個の1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

とし、係数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ と定数項 $b_1, b_2, \dots, b_n$ は与えられているものとします。また、この連立一次方程式は、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

とおくと、行列式

$$Ax = b$$

の形で書き表すことができます。従って、行列 A, b, x をコンピュータ上で配列¹ $a[][], b[], x[]$ として扱うことができます。

9.2 ガウスの消去法

ガウスの消去法というのは、方程式から未知数を1つずつ順に消去する**前進消去**を行い、最後に求まった未知数を逆に順次代入する**後退代入**によって全ての解を求める方法です。例えば、

$$\begin{cases} 4x + y + z = 9 & \dots \text{①} \\ x + 3y + z = 10 & \dots \text{②} \\ 2x + y + 5z = 19 & \dots \text{③} \end{cases}$$

をガウスの消去法 (正確にはガウス-ジョルダン法) を用いて解くと次のようになる。

前進消去

Step 1

① の両辺を 4 で割る。

$$x + 0.25y + 0.25z = 2.25 \quad \text{①}'$$

② から x を消去する (② - ①')。

$$2.75y + 0.75z = 7.75 \quad \text{②}'$$

③ から x を消去する (③ - ①' × 2)。

$$0.5y + 4.5z = 14.5 \quad \text{③}'$$

Step 2

②' の両辺を 2.75 で割る。

$$y + 0.2727\dots z = 2.8181\dots \quad \text{②}''$$

③' から y を消去する (③' - ②'')。

$$4.3636\dots z = 13.0909\dots \quad \text{③}''$$

Step 3

③'' の両辺を 4.3636\dots で割る。

$$z = 3$$

後退代入

Step 1

②'' に $z = 3$ を代入して y を求める。

$$y = 2.8181\dots - 0.2727\dots z = 2$$

Step 2

①' に $y = 2, z = 3$ を代入して x を求める。

$$x = 2.525 - 0.25y - 0.25z = 1$$

¹C 言語では配列の添え字は 0 から始まるので注意が必要です。

【注意】前進消去は、行に関する基本変形によって対角成分が1の上三角行列を求めることと同じです。

● ガウスの消去法

9-1.c

```

1: #include <stdio.h>
2:
3: main()
4: {
5:     double a[3][3]={4,1,1},{1,3,1},{2,1,5}};
6:     double b[3]={9,10,19},p;
7:     int i,j,k;
8:
9:     for(i=0;i<3;i++){
10:         p=a[i][i];
11:         for(j=i;j<3;j++) a[i][j]=a[i][j]/p;
12:         b[i]=b[i]/p;
13:         for(j=i+1;j<3;j++){
14:             p=a[j][i];
15:             for(k=i;k<3;k++) a[j][k]=a[j][k]-a[i][k]*p;
16:             b[j]=b[j]-b[i]*p;
17:         }
18:     }
19:     for(i=1;i>=0;i--){
20:         for(j=i+1;j<3;j++) b[i]=b[i]-a[i][j]*b[j];
21:     }
22: }
```

ところが、上記のプログラム 9-1.c では

$$\begin{cases} y + z = 9 & \dots \text{①} \\ x + 3y + z = 10 & \dots \text{②} \\ 2x + y + 5z = 19 & \dots \text{③} \end{cases}$$

のような、計算中に対角成分が0となるような連立1次方程式を解くことができません。従って、行を入れ替えて対角成分に0でない数を持つてくる必要があります。このような行の入れ替え操作を**ピボット選択**と呼び、列まで入れ替えする操作を**完全ピボット選択**と呼びます。完全ピボット選択で列の入れ替え操作を行うと未知数の入れ替え操作も必要なので、注意が必要です。

完全ピボット選択の例

$$\begin{cases} y + \quad + z = 9 \\ 3y + x + z = 10 \\ y + 2x + 5z = 19 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 19 \end{bmatrix}$$

なお、対角成分が0でなくても丸め誤差や積み残しによる誤差を減少させるため対角成分の値が一番大きくなるようにピボット選択を行います。

$$\text{ピボット選択の例} \quad \left\{ \begin{array}{rclcl} 2x & + & y & + & 5z & = & 19 & \cdots & \textcircled{3} \\ x & + & 3y & + & z & = & 10 & \cdots & \textcircled{2} \\ & & y & + & z & = & 9 & \cdots & \textcircled{1} \end{array} \right.$$

問題 1 ピボット選択の操作を含んだプログラムとなるように、9-1.cを改良しなさい。

問題 2 プログラム 9-1.c を応用し、 $\mathbf{a}[\][\]$ の逆行列を求めるプログラムを作成しなさい。