第2章　2進数

2.1　10進数とr進数

私達がふだん何気なく使っている数は**10進数**(decimal numbers)で、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9の10個の文字(数字)を使って書き表します。例えば、10進数123.45は

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

を意味し、各位にはそれぞれ10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}の重みが付いています。この重みの基準となる数を**基数**(radix)と呼びます。10進数では10が基数となりますが、このような10を基準とした数の表現を**10進法**[1](decimal notation)と呼びます。また、123.45のように各位の重みを省略して書き表す方法を**位取り記数法**と呼び、$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$のように重みを付加して書き表す方法を**基数記数法**(radix numeration system)と呼びます。

コンピュータが直接扱うことのできる**2進数**[2](binary numbers)は、基数を2とし0, 1の2個の数字を使って書き表します。例えば、2進数1011.101は

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

を意味し、10進法に直すと10進数11.625になります。逆に、10進数11.625は

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

のように基数が2となるように表現すれば、2進数1011.101となります。

[1] 10進法によって表現された数を10進数と呼びます。なお、10進数全体を10進法と呼ぶことがあります。
[2] **2進法**(binary notation)によって表現された数。

情報科学では、2 進数以外にも **8 進数**[3](octal numbers)・**16 進数**[4](hexadecimal numbers) がよく使われます (付録 A.1 参照, p.85)。なお、基数が 10 を越える場合[5]、数字だけでは数を表現する文字が足りないため、数字とアルファベットを使って書き表します。例えば、16 進数の場合、10, 11, 12, 13, 14, 15 に対応する文字として A, B, C, D, E, F を使って表します (表 2.1 参照)。

10 進数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16 進数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

表 2.1: 10 進数と 16 進数の対応

以上をまとめると、一般の場合は次のようになります。

r 進数　**r 進法**によって表現された **r 進数**は、基数を r とし 0, 1, 2, $\cdots$, $r-2$, $r-1$ の r 個の文字を使って書き表します。従って、r 進数 $a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_1\ a_0\ .\ a_{-1}\ \cdots\ a_{-m}$ は

$$a_n \times r^n + a_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m}$$

を意味します。ただし、$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-m}$ は 0, 1, 2, $\cdots$, $r-2$, $r-1$ のいずれかを取ります。前者は位取り記数法による表現で、後者は基数記数法による表現です。

【注意】16 進数123 を 10 進法に直すと 291 となり、10 進数123 とは異なった数になります。このテキストでは、r 進法によって表現された数 (r 進数) であることを明記するために、数の前に「r 進数」を付けて表すか、数の後ろに「(r)」を付けて表します。なお、省略されている場合は基本的に 10 進数として扱います。

10 進数の例:　10 進数12345, 12345(10), 123, 1000(10)
2 進数の例:　2 進数1010.101, 1010.101(2), 1000(2)
8 進数の例:　8 進数1234, 5670(8), -246(8), 1000(8)
16 進数の例:　16 進数7F, 7F(16), -F3.A(16), 1000(16)

例題 1　8 進数123 を 10 進数に直しなさい。

解答例　$123(8) = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 83(10)$

例題 2　100(16) を 10 進数に直しなさい。

解答例　$100(16) = 1 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 0 \times 16^0 = 256(10)$

例題 3　2 進数100.11 を 10 進数に直しなさい。

解答例　$100.11(2) = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 4.75(10)$

[3] **8 進法**(octal notation) によって表現された数。
[4] **16 進法**(hexadecimal notation) によって表現された数。
[5] このテキストでは 16 進数だけが当てはまります。

問題 1 `100(2)`, `1000(2)`, `10000(2)` をそれぞれ10進数に直しなさい。

問題 2 16進数`FF`を10進数に直しなさい。

問題 3 `0.1(8)`, `0.01(8)` をそれぞれ10進数に直しなさい。

問題 4 16進数で表すと`7BC`年`B`月`19`日生まれの人がいる。10進数に直しなさい。

● 覚えましょう — 2のベキ数 —

コンピュータは2進数を基準としているため、情報科学の分野では2のベキ数を10進数で表した値が至る所で現れます。従って、下表のベキ指数 n が0から10ぐらいまでの2のベキ数 2^n の値は覚えておくようにしましょう。

n	2^n
-1	0.5
-2	0.25
-3	0.125
-4	0.0625
-5	0.03125
-6	0.015625
-7	0.0078125
-8	0.00390625
-9	0.001953125
-10	0.0009765625
-11	0.00048828125
-12	0.000244140625
-13	0.0001220703125
-14	0.00006103515625
-15	0.000030517578125
-16	0.0000152587890625

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768

n	2^n
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648

2.2　基数変換

基数を r から r' に変換することを**基数変換**(radix transmission) と呼び、数の表現を r 進法から r′ 進法へ変換します。この節では、情報科学に関係した 10 進数・2 進数・8 進数・16 進数に関する基数変換について学びます。

最初に、10 進数`91.6875` から 2 進数`1011011.1011` への変換を例に挙げ、10 進数から r 進数へ基数変換する方法について学びましょう。変換には、次の 4 つのステップを踏みます。

Step 1　10 進数`91.6875` を整数部分`91(10)` と小数部分`0.6875(10)` に分けます。

Step 2　Step 1 の整数部分を 2 進数に変換します。整数を 2 進数に変換するには、下記のように商が 0 になるまで繰り返し基数 2 で割り、各余りを下から順に並べます。従って、`91(10)` を 2 進数に変換すると`1011011(2)` になります。

● 計算方法 1

$$
\begin{array}{rcrccc}
 & & & & \text{余り} & \\
91 \div 2 = & & 45 & \cdots & 1 & \uparrow \\
45 \div 2 = & & 22 & \cdots & 1 & \uparrow \\
22 \div 2 = & & 11 & \cdots & 0 & \uparrow \\
11 \div 2 = & & 5 & \cdots & 1 & \uparrow \\
5 \div 2 = & & 2 & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 \div 2 = & & 1 & \cdots & 0 & \uparrow \\
1 \div 2 = & & 0 & \cdots & 1 & \uparrow
\end{array}
$$

● 計算方法 2

$$
\begin{array}{rl|ccc}
2 & \underline{)\ 91} & & \text{余り} & \\
2 & \underline{)\ 45} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 & \underline{)\ 22} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 & \underline{)\ 11} & \cdots & 0 & \uparrow \\
2 & \underline{)\ \ 5} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 & \underline{)\ \ 2} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 & \underline{)\ \ 1} & \cdots & 0 & \uparrow \\
 & \ \ \ 0 & \cdots & 1 & \uparrow
\end{array}
$$

Step 3　Step 1 の小数部分を 2 進数に変換します。小数を 2 進数に変換するには、下記のように積の小数部分が 0 になるまで繰り返し基数 2 で掛け、各積の整数部分を上から順に並べます。従って、`0.6875(10)` を 2 進数に変換すると`0.1011(2)` になります。

● 計算方法 1

$$
\begin{array}{rlc}
0.6875 \times 2 = & 1.375 & \downarrow \\
0.375 \times 2 = & 0.75 & \downarrow \\
0.75 \times 2 = & 1.5 & \downarrow \\
0.5 \times 2 = & 1.0 & \downarrow
\end{array}
$$

● 計算方法 2

$$
\begin{array}{rc}
0.6875 & \\
\underline{\times \qquad 2} & \\
1.375 & \downarrow \\
\underline{\times \qquad 2} & \\
0.75 & \downarrow \\
\underline{\times \qquad 2} & \\
1.5 & \downarrow \\
\underline{\times \qquad 2} & \\
1.0 & \downarrow
\end{array}
$$

Step 4　Step 2 と Step 3 で計算した整数部分`1011011(2)` と小数部分`0.1011(2)` を一緒にすると、2 進数`1011011.1011` を得ます。

*計算方法 1 と計算方法 2 がありますが、どちらか一方をしっかり覚えてください。

上記の例に習えば、10 進数を r 進数へ変換するには、Step 2 と Step 3 の基数 2 を基数 r に変えれば良いことが判ります。言い換えると、Step 2 では繰り返し基数 r で割り、Step 3 では繰り返し基数 r で掛けることによって r 進数を得ます。例えば、前例の 10 進数`91.6875` を 8 進数及び 16 進数へ変換するには次のように行います。

8 進数へ変換

Step 2 (整数部分)

$$\begin{array}{rrcrc} 91 \div 8 = & 11 & \cdots & 3 & \uparrow \\ 11 \div 8 = & 1 & \cdots & 3 & \uparrow \\ 1 \div 8 = & 0 & \cdots & 1 & \uparrow \end{array}$$

`133(8)`

Step 3 (小数部分)

$$\begin{array}{rrc} 0.6875 \times 8 = & 5.5 & \downarrow \\ 0.5 \times 8 = & 4.0 & \downarrow \end{array}$$

`0.54(8)`　　従って　`133.54(8)`

16 進数へ変換

Step 2 (整数部分)

$$\begin{array}{rrcrc} 91 \div 16 = & 5 & \cdots & 11 & \uparrow \\ 5 \div 16 = & 0 & \cdots & 5 & \uparrow \end{array}$$

`5B(16)`

Step 3 (小数部分)

$$\begin{array}{rrc} 0.6875 \times 16 = & 11.0 & \downarrow \end{array}$$

`0.B(16)`　　従って　`5B.B(16)`

例題 1　10 進数`100` をそれぞれ 2 進数・8 進数・16 進数に直しなさい。

解答例

$$\begin{array}{rrcrc} 100 \div 2 = & 50 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 50 \div 2 = & 25 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 25 \div 2 = & 12 & \cdots & 1 & \uparrow \\ 12 \div 2 = & 6 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 6 \div 2 = & 3 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 3 \div 2 = & 1 & \cdots & 1 & \uparrow \\ 1 \div 2 = & 0 & \cdots & 1 & \uparrow \end{array}$$

`1100100(2)`

$$\begin{array}{rrcrc} 100 \div 8 = & 12 & \cdots & 4 & \uparrow \\ 12 \div 8 = & 1 & \cdots & 4 & \uparrow \\ 1 \div 8 = & 0 & \cdots & 1 & \uparrow \end{array}$$

`144(8)`

$$\begin{array}{rrcrc} 100 \div 16 = & 6 & \cdots & 4 & \uparrow \\ 6 \div 16 = & 0 & \cdots & 6 & \uparrow \end{array}$$

`64(16)`

例題 2　10 進数`0.1` を 2 進数に直しなさい。

解答例

$$\begin{array}{rrc} 0.1 \times 2 = & 0.2 & \downarrow \\ 0.2 \times 2 = & 0.4 & \downarrow \\ 0.4 \times 2 = & 0.8 & \downarrow \\ 0.8 \times 2 = & 1.6 & \downarrow \\ 0.6 \times 2 = & 1.2 & \downarrow \\ 0.2 \times 2 = & 0.4 & \downarrow \\ 0.4 \times 2 = & 0.8 & \downarrow \\ 0.8 \times 2 = & 1.6 & \downarrow \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

答えは`0.0001100110011···(2)` で、`0011` が循環する循環小数となります。

*10 進数で実数として正しく表すことができても、2 進数で正しく表すことができるとは限りません。当然ですが、理由は 10 進数の基数には約数として 5 を含んでいますが、2 進数には含まれていないからです。数学的には分数で表すこともできますが、情報科学ではそのような表現を見かけたことがないので省略します。