次に、2 進数・8 進数・16 進数の相互変換について学びましょう。コンピュータは 2 進数を直接扱いますが、人間は10111001101 のように 0 と 1 の羅列によって表された数の大きさを直感的に理解するのは困難です。そのため、情報科学では 2 進数を 10 進数に近い 8 進数や 16 進数に変換して表すことがよくあります。8 進数や 16 進数は、基数が 2 のべき数のため 2 進数に関する性質を応用しやすく、次に紹介する方法を用いると 2 進数から 10 進数へ変換するよりも基数変換が容易になります。

2 進数 $\Longleftrightarrow$ 8 進数　表 2.2 のように 8 進数の 1 桁は 2 進数の 3 桁に対応しています。このことを利用すると、2 進数から 8 進数への変換は、小数点を基準に 2 進数を 3 桁ずつに区切り、各 3 桁の 2 進数を対応する 1 桁の 8 進数に書き換えることによって実行されます。逆に、8 進数から 2 進数への変換は、8 進数の各桁を対応する 3 桁の 2 進数に書き換えることによって実行されます。

2 進数 $\Longleftrightarrow$ 16 進数　表 2.3 のように 16 進数の 1 桁は 2 進数の 4 桁に対応しており、8 進数と 16 進数の場合で異なるのは、3 桁が 4 桁になるということだけです。従って、2 進数から 16 進数への変換は、小数点を基準に 2 進数を 4 桁ずつに区切り、各 4 桁の 2 進数を対応する 1 桁の 16 進数に書き換えることによって実行されます。逆に、16 進数から 2 進数への変換は、16 進数の各桁を対応する 4 桁の 2 進数に書き換えることによって実行されます。

	2 進数	8 進数
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

表 2.2: 3 桁の 2 進数

	2 進数	16 進数
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

表 2.3: 4 桁の 2 進数

例として、先ほど計算した 2 進数`1011011.1011` について 8 進数及び 16 進数へ基数変換を実行すると、以下のようになります。ただし、桁数を揃えるため適当に `0` を補います。

2 進数	001	011	011.	101	100
⇕	↕	↕	↕	↕	↕
8 進数	1	3	3 .	5	4

2 進数	0101	1011.	1011
⇕	↕	↕	↕
16 進数	5	B .	B

以上をまとめると図 2.1 のようになり、10 進数・2 進数・8 進数・16 進数の相互変換をスムーズに行うことができます。なお、8 進数から 16 進数への変換や 16 進数から 8 進数への変換は、一度 2 進数に直してから変換すると効率よく変換できます。

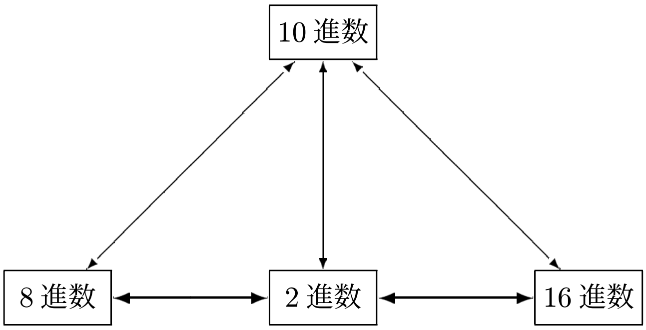

図 2.1: 10 進数・2 進数・8 進数・16 進数の相互変換

例題 3 2 進数`10110101` をそれぞれ 8 進数・16 進数に直しなさい。

解答例

2 進数	010	110	101
⇕	↕	↕	↕
8 進数	2	6	5

2 進数	1011	0101
⇕	↕	↕
16 進数	B	5

例題 4 16 進数`FFF` を 8 進数に直しなさい。

解答例

16 進数	F	F	F		
⇕	↕	↕	↕		
2 進数	1111	1111	1111		
2 進数	111	111	111	111	3 桁に区切り直す
⇕	↕	↕	↕	↕	
8 進数	7	7	7	7	

問題 1　`255(10)`, `1023(10)` をそれぞれ2進数に直しなさい。

問題 2　`240.9375(10)` を16進数に直しなさい。

問題 3　`1011101011(2)` を8進数に直しなさい。

問題 4　`10111.01011(2)` を16進数に直しなさい。

● コーヒーブレイク — 数の誕生 —

数の概念から数字までは、他の文字より誕生が早かったともいわれており、文明の発達と密接な関係を持って来ました。現在、幅広く使用されている10進数は、身体の一部である指などの数を基準に数え始めたものだと言われており、「handful(両手:10)」や handful of handful(10掛ける10) から「hundred(100)」のように、その名残が数多くあります。

数の概念の確立と共に、それを記憶しておくための文字である数字が生まれ、今日ではローマ数字・漢数字・アラビア数字などが利用されています。また、古代インドのヒンズー人が「0」という概念を発見したことは歴史的にも重要で、アラビアを経由して広まった数の表現がシンプルなアラビア数字が、世界の最もポピュラーな数字となりました。

2.3　四則演算

r 進数の足し算・引き算・掛け算・割り算とも、基数が r であることに注意すれば、10 進数の場合と同じように演算することができます。すなわち、10 進数では繰り上がりや上の位から値を借りるとき 10 が基準となりますが、r 進数の場合は r になります。各演算について簡単な例を挙げておきます。

例題 1　1110.011+101.11(2), 16.3+5.6(8), E.6+5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
     1110.011          16.3         E.6
+     101.11       +    5.6     +   5.C
-------------      ---------    -------
   10100.001(2)       24.1(8)    14.2(16)
```

例題 2　1110.011−101.11(2), 16.3−5.6(8), E.6−5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
    1110.011           16.3          E.6
−    101.11        −    5.6      −   5.C
-----------        ---------     -------
    1000.101(2)        10.5(8)       8.A(16)
```

例題 3　1110.011×101.11(2), 16.3×5.6(8), E.6×5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
          1110.011          16.3           E.6
×           101.11     ×     5.6     ×     5.C
------------------     ----------    ---------
          11 10011         12 62          A C8
         111 0011         107 7          47 E
        1110 011       ----------    ---------
       00000 00           122.52(8)     52.A8(16)
      111001 1
------------------
     1010010.10101(2)
```

例題 4　1110.011÷101.11(2), 16.3÷5.6(8), E.6÷5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
             10.1(2)              2.4(8)              2.8(16)
        ------------         ----------          ---------
10111 ) 111001.1         56 ) 163            5C )  E6
        10111                 134                  B8
        ------------         ----------          ---------
          1011                 27 0                2E 0
             0                 27 0                2E 0
        ------------         ----------          ---------
          1011 1                  0                   0
          1011 1
        ------------
               0
```

例題 5　1110.011×10(2), 16.3×100(8), E.6×1000(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例　1110.011×10(2)=11100.11(2)
16.3×100(8)=1630(8)
E.6×1000(16)=E600(16)

例題 6　1110.011÷1000(2), 16.3÷100(8), E.6÷10(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例　1110.011÷1000(2)=1.110011(2)
16.3÷100(8)=0.163(8)
E.6÷10(16)=0.E6(16)

*例題 5 や例題 6 は、10 進数の場合と同様に 0 の個数だけ小数点の位置を移動すればよい。

私達は、小学生で掛け算九九を習うなど日頃から 10 進数に慣れ親しんでおり、10 進数の四則演算をスムーズに行うことができます。しかしながら、例題のような基数が異なる数の演算は思うように計算することができません。そこで、10 進数の掛け算九九に相当する 8 進数や 16 進数の掛け算表を作成することによって計算を行う際の手助けとしましょう。

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2		4	6	10	12	14	16
3			11	14	17	22	25
4				20	24	30	34
5					31	36	43
6						44	52
7							61

表 2.4: 8 進数の掛け算表

問題 1　A =11001.111(2), B =1011.1(2) とする。$A+B$, $A-B$, $A\times B$, $A\div B$ を計算し、それぞれ 2 進数で答えなさい。

問題 2　表 2.4 の 8 進数の掛け算表を利用して234×56(8), 41117÷54(8) を計算し、それぞれ 8 進数で答えなさい。

問題 3 表 2.4 の 8 進数の掛け算表に習って、以下の 16 進数の掛け算表を完成させなさい。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2		4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
A															
B															
C															
D															
E															
F															

表 2.5: 16 進数の掛け算表

問題 4 表 2.5 の 16 進数の掛け算表を利用して `5AC×F3(16)`, `62986E÷9BA(16)` を計算し、それぞれ 16 進数で答えなさい。

● コーヒーブレイク — 九九 —

日本では、掛け算九九を言葉遊びとして用いた歌が万葉集で歌われるなど、古くから掛け算や割り算が普及していました。例としては、「二二」と書いて「し」と読ませたり、「重二」を「し」、「二五」を「とを」、「十六」を「しし」、「八十一」を「くく」などと読ませていました。

平安朝の 970 年には、源為憲という人が七歳の長男のために作った教科書の中に九九があり、いまとは逆に九九 (八十一) から始まって一一 (一) で終わっていました。その中には、「いろは歌」の先駆けというべき 47 文字の歌があり、読み書き・そろばんの原型になっています。

2.4　情報量

情報を定量的に取り扱うことを初めて明確な形で提唱したのは、シャノン (C. E. Shannon, 1916–) で、1948 年に「Mathematical Theory of Communication」という情報理論に関する論文を発表しました。この論文の中で、**情報量**を表す単位として 2 進数 1 桁という意味を持つ**ビット**(bit:binary digit) が、初めて導入されました。

情報量　事象 A が起こる確率を $P(A)$ としたとき情報量 $I(A)$ は

$$I(A) = -\log P(A)$$

によって定義されます。特に、情報科学では対数の底を 2 にとり、1 ビットの情報量で、同じ確率で起こる 2 つの事象の内どちらが起こったかを知ることができます。

例として、硬貨投げで表が出るか裏が出るかという問題を考えると、表が出る確率は $\frac{1}{2}$ ですから、表が出たことを知るための情報量は $-\log\frac{1}{2} = 1$ ビットになります。逆に考えれば、1 ビットあれば表を 1・裏を 0 とすることで、どちらが起こったのか必要な情報を得ることができます。もう一つ例としてサイコロの問題を考えてみましょう。1 が出たことを知るための情報量は $-\log\frac{1}{6} = 2.58$ となり、3 ビット必要になります。同様に逆を考えれば、1 を 001・2 を 010・3 を 011・4 を 100・5 を 101・6 を 110 にそれぞれ対応させることによって、必要な情報を得ることができます。上記の 2 つの例から、n ビットでは 2^n 個の情報を得ることができ、起こる確率が小さいほど情報量は大きくなることが判ります。

その他の情報量を表す単位としては、2 進数 8 桁に相当する 8 ビットの列をひとまとめに表す**バイト**(byte) があります (8bit=1byte)。また、コンピュータ内部でプログラムやデータを扱うときは、8 の倍数 (8, 16, 24) となるような有限桁のビット数で 1 つの情報を扱い、この基準となる 1 語を**ワード**(word) と呼びます。図 2.2 のように 1 ワードを 2 バイト (16 ビット) で表すとき、左から順に各桁を「第 15 ビット (15 ビット目)」,「第 14 ビット (14 ビット目)」, $\cdots$,「第 0 ビット (0 ビット目)」と呼び (普通は第 16 桁, $\cdots$, 第 2 桁, 第 1 桁の順)、特に、左端の第 15 ビットを**最上位ビット**、右端の第 0 ビットを**最下位ビット**と呼びます。また、最上位ビットから 8 ビット目までを上位 8 ビット、最下位ビットから 3 ビット目までを下位 4 ビットのように呼びます。

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

図 2.2: 1 ワードを 2 バイトとした場合

問題 1　数字 1 から 100 を知るために必要な情報量を求めなさい。

問題 2　アルファベット A から Z を知るために必要な情報量を求めなさい。

問題 3　トランプ 52 枚からスペードであることを知るために必要な情報量を求めなさい。