第3章　論理演算

3.1　ブール代数

基本的な論理演算には**論理積**(AND)・**論理和**(OR)・**否定**(NOT) の3つがあり、**ブール代数**から定義されます。ブール代数では、**命題**(正しいか正しくないかはっきり表せるもの) に対して正しいか正しくないかということだけを問題とします。命題が正しいとき**真**(true) であるといい、正しくないとき**偽**(false) であるといいます。特に、情報科学の分野では真と偽を1と0で表します。また、ある命題が与えられたとき命題自身を A や B などの文字を使って表しますが、これを**命題変数**といいます。例えば、

「ブリは魚である」

という命題を A とおくと、この命題は正しいので、

$$A = 1$$

と表すことができます。

命題は、1つ以上の命題に対してある演算 (論理演算) を定義することによって新しい命題を得ることができます。実際、n 個の命題を命題変数 A_1,A_2,$\cdots$,A_n で表し、ある演算を行う**論理関数**を F とすると、新しい命題は $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ で表すことができます。より詳しく述べれば、命題変数は1か0の値しか取らないので、この関数は 2^n 通りの変数の組み合わせから1又は0のどちらかに対応させる演算を行います。

$$F(A_1, A_2, \cdots, A_n) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

それでは、論理積・論理和・否定の基本的な3つの論理演算について詳しく見ていきましょう。同時に各論理演算を記述するための**論理演算記号**と**論理式**を挙げておきます。

論理積　命題変数 A,B に対して論理積を表す論理関数 F' とすると、論理積は

$$F'(A,B) = \begin{cases} 1, & A = 1 \text{ かつ } B = 1 \\ 0, & \text{それ以外 } (A = 0 \text{ または } B = 0) \end{cases}$$

で定義され、論理積を表す論理演算記号 $\cdot$ を用いて $A \cdot B$ と論理式を記述します。

論理和　命題変数 A,B に対して論理和を表す論理関数を F'' とすると、論理和は

$$F''(A,B) = \begin{cases} 1, & A = 1 \text{ または } B = 1 \\ 0, & \text{それ以外 } (A = 0 \text{ かつ } B = 0) \end{cases}$$

で定義され、論理和を表す論理演算記号 $+$ を用いて $A + B$ と論理式を記述します。

否定　命題変数 A に対して否定を表す論理関数を F''' とすると、否定は

$$F'''(A) = \begin{cases} 1, & A = 0 \\ 0, & A = 1 \end{cases}$$

で定義され、否定を表す論理演算記号 $\overline{}$ を用いて $\overline{A}$ と論理式を記述します。

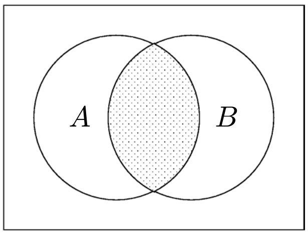
論理演算では、1 つの命題変数は 1 または 0 のいずれかで、取り得る全ての組み合わせに対して演算結果をまとめることによって、**真理値表**や**ベン図**など、表や図を使って論理関係を書き表すことができます。以下に、論理積・論理和・否定の真理値表及びベン図を挙げておきます。なお、ベン図では 1 になる部分を塗りつぶします。

論理積　$A \cdot B$

真理値表

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ベン図

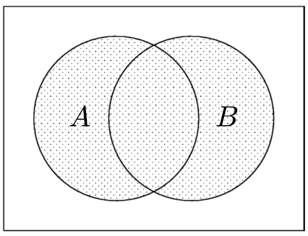


論理和　$A + B$

真理値表

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ベン図

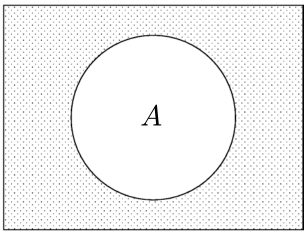


否定　$\overline{A}$

真理値表

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ベン図



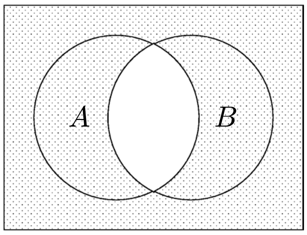
情報科学の分野では、論理積・論理和・否定の他に**否定積**(NAND[1])・**否定和**(NOR[2])・**排他的論理和**(XOR[3], EOR[4]) の 3 つの論理演算をよく使用します。なお、新しく加えた 3 つの論理演算は以下のように定義されます。

否定積　$A \mid B = \overline{A \cdot B}$

真理値表

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ベン図

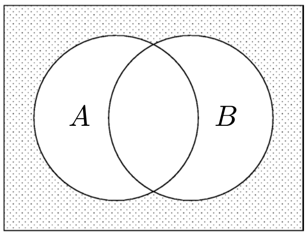


否定和　$A \downarrow B = \overline{A + B}$

真理値表

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ベン図

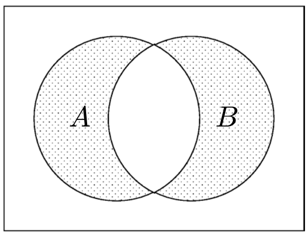


排他的論理和　$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

真理値表

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ベン図



[1] NAND = Not AND.
[2] NOR = Not OR.
[3] XOR = eXclusive OR.
[4] EOR = Exclusive OR.

3.2　論理演算の基本公式

基本的な論理演算を理解したところで、論理演算に関する基本公式と証明方法について学習しましょう。最初に注意しなければならないことは、論理演算にも四則演算のように演算に優先順位があるということです。論理積・論理和・否定および括弧には表 3.1 ような演算の優先順位が決められています。

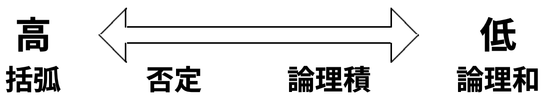


表 3.1: 演算の優先順位

論理演算に関する主な基本公式は表 3.2 のようなものがあります。証明は、命題変数が取り得る全ての組み合わせに対して等式が成り立つことを述べればよいので、真理値表やベン図を描くことによって証明できます。

$\overline{\overline{A}} = A$		2 重否定
$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$	交換則
$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	結合則
$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	分配則
$A + A = A$	$A \cdot A = A$	べき等則
$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	ド・モルガンの定理
$A + 0 = A$	$A \cdot 1 = A$	
$A + 1 = 1$	$A \cdot 0 = 0$	
$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$	
$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B)$	
$A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$	
$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	

表 3.2: 論理演算の基本公式

例えば、ド・モルガンの定理と呼ばれる等式 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ の証明は、表 3.3 のような真理値表を描くことで完了します。なお、慣れるまでは一度 $A + B, \overline{A}, \overline{B}$ を求めてから、$\overline{A + B}$ や $\overline{A} \cdot \overline{B}$ を求めると誤りが少なくなります。

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

表 3.3: 等式 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ の証明

例題 1　論理演算に関する等式 $A \cdot (A+B) = A$ を証明しなさい。

解答例　(証明)

A	B	$A+B$	$A \cdot (A+B)$	A
0	0	0	$0 \cdot 0 = 0$	0
0	1	1	$0 \cdot 1 = 0$	0
1	0	1	$1 \cdot 1 = 1$	1
1	1	1	$1 \cdot 1 = 1$	1

例題 2　論理演算に関する等式 $A \cdot \overline{A} = 0$ を証明しなさい。

解答例　(証明)

A	$\overline{A}$	$A \cdot \overline{A}$	0
0	1	$0 \cdot 1 = 0$	0
1	0	$1 \cdot 0 = 0$	0

問題 1　論理演算に関する等式 $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$ を証明しなさい。

問題 2　論理演算に関する等式 $A + B \cdot C = (A+B) \cdot (A+C)$ を証明しなさい (分配則)。

問題 3　論理演算に関する等式 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ を証明しなさい (ド・モルガンの定理)。

問題 4　論理演算に関する等式 $(A+B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$ を証明しなさい。

3.3　万能演算系

基本的な論理演算である論理積・論理和・否定は、全ての論理関数を構成することができるため**万能演算系**と呼ばれています。このことは、次章の論理回路と深い関係を持っているので、詳しく説明します。

最初に命題変数が 1 つの場合について考えみましょう。このとき、元の命題変数 A の値と新しい命題 $F(A)$ の値の組み合わせは 4 通りで、1 変数の論理関数は表 3.4 の F_0,F_1,F_2,F_3 のいずれかになります。

A	0	1	論理式
$F_0(A)$	0	0	0
$F_1(A)$	0	1	A
$F_2(A)$	1	0	$\overline{A}$
$F_3(A)$	1	1	1

表 3.4: 1 変数の論理関数

F_1 と F_2 は A の関数となっており、論理関数 F は否定のみで表すことができます。また、F_0 と F_3 はそれぞれ 0 と 1 に固定されています。従って、1 変数の論理式は $0, 1, A, \overline{}$ で全て表すことができます。

次に命題変数が 2 つの場合について考えてみましょう。命題変数が 1 つの場合にならうと、元の命題変数 A,B の値と新しい命題 $F(A, B)$ の値の組み合わせは 16 通りになるので、2 変数の論理関数は表 3.5 の F_0,F_1,$\cdots$,F_{15} のいずれかになります。従って、命題変数が 2 つの場合も、論理積・論理和・否定によって全ての関数を表すことができるので、2 変数の論理式は $0, 1, A, B, \overline{}, \cdot, +$ で全て表すことができます。

A	0	0	1	1	論理式
B	0	1	0	1	
$F_0(A, B)$	0	0	0	0	0
$F_1(A, B)$	0	0	0	1	$A \cdot B$
$F_2(A, B)$	0	0	1	0	$A \cdot \overline{B}$
$F_3(A, B)$	0	0	1	1	A
$F_4(A, B)$	0	1	0	0	$\overline{A} \cdot B$
$F_5(A, B)$	0	1	0	1	B
$F_6(A, B)$	0	1	1	0	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$
$F_7(A, B)$	0	1	1	1	$A + B$
$F_8(A, B)$	1	0	0	0	$\overline{A + B} = A \downarrow B$
$F_9(A, B)$	1	0	0	1	$\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$
$F_{10}(A, B)$	1	0	1	0	$\overline{B}$
$F_{11}(A, B)$	1	0	1	1	$A + \overline{B}$
$F_{12}(A, B)$	1	1	0	0	$\overline{A}$
$F_{13}(A, B)$	1	1	0	1	$\overline{A} + B$
$F_{14}(A, B)$	1	1	1	0	$\overline{A \cdot B} = A \mid B$
$F_{15}(A, B)$	1	1	1	1	1

表 3.5: 2 変数の論理関数

同様に、多変数の場合も 2 変数の場合に帰着することができるので、論理積・論理和・否定で全ての関数を表すことができることは明らかです (帰納法によって証明)。

上記で述べたように、論理積・論理和・否定で全ての論理演算を構成することができますが、特に、万能演算系の組が独立なものを**最小万能演算系**といい、論理積・否定の組や論理和・否定の組があります。論理和と否定の組が最小万能演算系であることを証明するには、論理積が論理和と否定で表せることと論理和と否定が独立であることを示せばよいことがわかります。前者については、ド・モルガンの定理を用いれば

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

なので、論理積は論理和と否定で表せることが直ちにわかります。後者については、論理和と否定が独立でないと仮定して矛盾を示します。もし、独立でないなら否定は論理和で表せることになるので、1 変数の場合に全ての関数が論理和で表せることになり、表 3.4 の $F_2(A)$ に対応する論理式を $A + A$, $A + 1$, $A + 0$ のいずれかで表すことができることになります。ところが、どれ

も否定を表すことができないので矛盾となり、論理和と否定が独立であることが示されます。

さて、このような最小万能演算系は全ての演算を構成することができますので、次章の論理回路を構成する上で最小万能演算系を実行する回路があれば必要かつ十分であるといえます。実際のコンピュータでは、1 つの演算で最小万能演算系となる否定積または否定和によって論理回路が構成されています。実際、否定・論理積・論理和・否定和・排他的論理和を否定積のみで表すと表 3.6 のようになり、最小万能演算系であることが証明されます。

$$
\begin{aligned}
\overline{A} &= \overline{A \cdot A} = A \mid A \quad (\text{べき等則 } A = A \cdot A \text{ より}) \\
A \cdot B &= \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{A \mid B} = \overline{(A \mid B) \cdot (A \mid B)} = (A \mid B) \mid (A \mid B) \\
A + B &= \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{A} \mid \overline{B} = (A \mid A) \mid (B \mid B) \\
A \downarrow B &= \overline{A + B} = \{(A \mid A) \mid (B \mid B)\} \mid \{(A \mid A) \mid (B \mid B)\} \\
A \oplus B &= \overline{\overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B}} = \overline{\overline{A \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B}} = \overline{A \cdot \overline{B}} \mid \overline{\overline{A} \cdot B} \\
&= (A \mid \overline{B}) \mid (\overline{A} \mid B) = \{A \mid (B \mid B)\} \mid \{(A \mid A) \mid B\}
\end{aligned}
$$

表 3.6: 否定積による基本的な論理演算の表現

問題 1 論理積と否定の組が最小万能演算系となることを証明しなさい。

問題 2 $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A + B$, $A \mid B$, $A \oplus B$ を否定和 ($\downarrow$) のみで表しなさい。

問題 3 論理積と論理和の組は最小万能演算系となるか。

問題 4 排他的論理和は最小万能演算系となるか。