第10章　C言語 応用編

10.1　数値積分

みなさんは、今まで初等関数に対して解析的に積分する方法を学んできました。しかしながら、科学分野では、関数 $f(x)$ が初等関数で与えられる場合が少なく、たとえ初等関数であっても積分を解析的に求めることが困難な場合が数多く存在します。そこで、この章では、関数 $f(x)$ に関して $x=a$ から $x=b$ まで必要な精度で数値的に定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

の値を求める方法を学びましょう。

連続な関数 $f(x)$ に対して $x=a$ から $x=b$ までの定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)dx, \quad \text{ただし } h = \frac{b-a}{N}$$

と書けます。ここで、各 $x=a+id$ から $x=a+(i+1)d$ までの区間に対して長方形 (定数) で近似すると

$$\int_a^b f(x)dx \qquad h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(a+ih\right)$$

となり定積分の近似値を求めることができます (もちろん、右辺に対して極限 $(n\to\infty)$ を求めると左辺と一致します)。以後、このような近似によって定積分の値を求める方法を学ぶわけですが、科学分野では積分関数 $f(x)$ が等間隔でサンプリングされたデータの集合であることがほとんどです。従って、積分関数が初等関数の場合は $x_i(i=0,1,2,\cdots)$ でサンプリングされた $f(x_i)$ の値をデータの集合として扱うことにします。

数値積分とは、$x_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して $f(x_i)$ の値がわかっているとき、積分値を近似的に

$$\int_a^b f(x)dx \quad w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \cdots$$

の形で求めることです。ここで、x_i を**分点**[1]と呼び、w_i を分点 x_i に対応する**重み**[2]と呼びます。

問題 1　長方形で近似することによって、$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ の値を求めるプログラムを作成しなさい。

10.2　台形公式

曲線 $y = f(x)$ を 1 次式で近似することによって、$f(x)$ を $x = a$ から $x = b$ まで N 等分し数値積分すると、以下の**台形公式**を得ます。

$h = \frac{b-a}{N}$ とおき、各分点を

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, N), \quad x_0 = a, \quad x_N = b,$$

とし、各分点 x_i の $y = f(x)$ の値を

$$y_i = f(x_i)$$

とします。ここで、区間 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ で 2 点 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ を通る x の 1 次式で近似するわけですが、これは、図 10.1 のように $(x_i, 0), (x_{i+1}, 0), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_i, y_i)$ で囲まれた台形面積と同じですから、数値積分の値 I_1 は次のようになります。

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{N-1} + y_N) \\ &= h\left(\frac{y_0 + y_N}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{N-1}\right) \\ &= h\left(\frac{y_0 + y_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\right), \quad \text{ただし } h = \frac{b-a}{N} \end{aligned}$$

[1]本章では、分点が等間隔な場合のみを扱います。

[2]重み w_i は分点 x_i に依存しますが、$f(x)$ には依存しません。また、重み w_i は積分値ができるだけ正確になるようにつくられます。

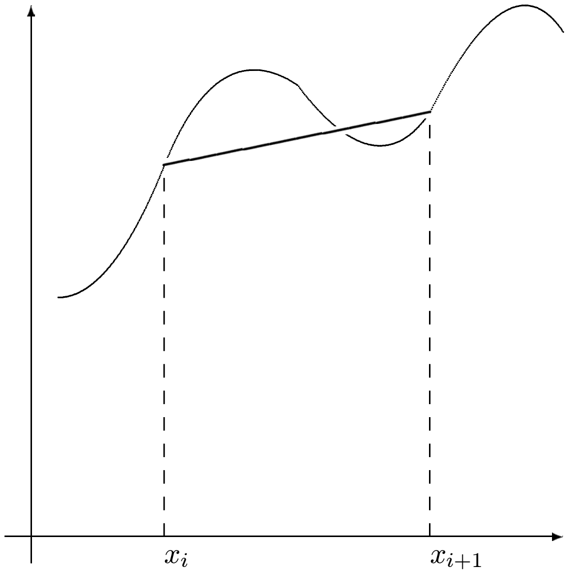

図 10.1: 台形公式

問題 1　台形公式を使って、$\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ の値を求めるプログラムを作成しなさい。

10.3　シンプソンの公式

$f(x)$ がなめらかな関数であれば、曲線 $y = f(x)$ を 1 次式で近似した台形公式より 2 次式で近似した**シンプソンの公式**のほうが精度の良い数値積分の値を求めることができます。シンプソンの公式は次のように求めることができます。

$x = a$ から $x = b$ までの積分区間を $2N$ 等分し、$h = \dfrac{b-a}{2N}$ とおくと、各分点は

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, 2N), \quad x_0 = a, \quad x_{2N} = b$$

で表されます。ここで、各 $x_i \leq x \leq x_{i+2}$(i は偶数) で 3 点 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$ を通る 2 次式

$$\begin{aligned} g(x) \quad &= \quad \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}y_i + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}y_{i+1} \\ &\quad + \frac{(x-x_{i+i})(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_{i+1})}y_{i+2} \end{aligned}$$

で近似します (図 10.2)。各区間で上記の 2 次関数を積分すると

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} g(x)dx = \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

となり、全区間加えた数値積分 I_2 は次のようなります。

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + \sum_{j=1}^{N-2}(y_{2j} + 4y_{2j+1} + y_{2j+2}) + y_{2N-2} + 4y_{2N-1} + y_{2N} \right) \\
&= \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2N} + 4\sum_{j=1}^{N} y_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{N-1} y_{2j} \right), \quad \text{ただし}\ h = \frac{b-a}{2N}
\end{aligned}
$$

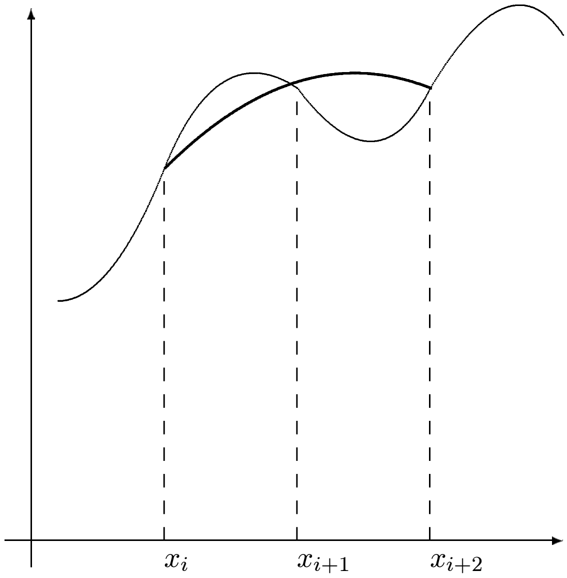

図 10.2: シンプソンの公式

問題 1　シンプソンの公式を使って、$\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ の値を求めるプログラムを作成しなさい。