2 行列式論

2.12.2 クラメルの公式

C 解の存在と一意性を判定し, 解が一意的に存在する場合にはクラメルの公式で一意解を求めよ.

[(1) の解答例] 連立方程式の係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く. 解の存在と一意性を判定するために $\det A$ を計算する.

$$\det A = 3\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot(-3)\cdot(-7) - (-7)\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot 5\cdot 1 = 14.$$

$\det A \neq 0$ であるから, 一意の解が存在する. 従って, クラメルの公式より, 一意解は

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det A}\cdot\det\begin{pmatrix} \boxed{0} & 5 & -7 \\ \boxed{2} & 1 & -1 \\ \boxed{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3, \\[2ex] y = \dfrac{1}{\det A}\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & \boxed{0} & -7 \\ 1 & \boxed{2} & -1 \\ 2 & \boxed{5} & 1 \end{pmatrix} = 1, \\[2ex] z = \dfrac{1}{\det A}\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{2} \\ 2 & -3 & \boxed{5} \end{pmatrix} = 2. \quad \blacksquare \end{cases}$$

[(3) の解答例] 連立方程式の係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置く. 解の存在と一意性を判定するために $\det A$ を計算する.

$$\det A = 1\cdot 2\cdot 0 + 3\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 1 = 16.$$

$\det A \neq 0$ であるから, 一意の解が存在する. 従って, クラメルの公式より, 一意解は

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 13 \\ 11 \\ 10 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \dfrac{33}{16}, \\[2ex] y = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 13 \\ 11 \\ 10 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \dfrac{61}{16}, \\[2ex] z = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 13 \\ 11 \\ 10 \end{matrix}} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

[(5) の解答例] 連立方程式の係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

と置く. 解の存在と一意性を判定するために $\det A$ を計算する.

$$\begin{aligned} \det A &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \cdot \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right). \end{aligned}$$

条件より $\det A \neq 0$ であるから, 一意の解が存在する. 従って, クラメルの公式より, 一意解は

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ a \\ c \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ b \\ a \end{matrix} \end{pmatrix} = \dfrac{2 \cdot (a-b) \cdot (a-c) \cdot (a+b+c)}{(a+b+c) \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)} \\ \qquad = \dfrac{2 \cdot (a-b) \cdot (a-c)}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}, \\[2ex] y = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \begin{matrix} a \\ c \\ b \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} & \begin{matrix} c \\ b \\ a \end{matrix} \end{pmatrix} = \dfrac{2 \cdot (c-a) \cdot (c-b) \cdot (a+b+c)}{(a+b+c) \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)} \\ \qquad = \dfrac{2 \cdot (c-a) \cdot (c-b)}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}, \\[2ex] z = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \begin{matrix} a \\ c \\ b \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \end{pmatrix} = \dfrac{2 \cdot (b-a) \cdot (b-c) \cdot (a+b+c)}{(a+b+c) \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)} \\ \qquad = \dfrac{2 \cdot (b-a) \cdot (b-c)}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}. \quad \blacksquare \end{cases}$$

幸山直人

2004 年 11 月 6 日