

線形代数学Iおよび線形代数学I演習

11月26日(金)に実施された線形代数学I演習のQuiz(小テスト)の正則性・直交性・完全性を証明するには、複素数・アジョイント・ユニタリ内積・ノルムの計算を複合的に行う必要があります(最後の完全性の証明は全滅でした)。複素数・アジョイント・ユニタリ内積・ノルムの持つ意味や性質を理解し、計算方法をしっかりマスターしておきましょう。計算をごまかさないように!

(隠れた)条件を上手に使うこと: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{C}^n$ が「ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ の部分空間」 $\mathcal{L}$ の正規直交基底

$$\iff \begin{cases} \|\mathbf{e}_1\| = 1, \|\mathbf{e}_2\| = 1 & \text{(正則性),} \\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \quad (\Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 \rangle = 0) & \text{(直交性),} \\ \mathbf{y} \in \mathcal{L} \implies \|\mathbf{y}\|^2 = |\langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + |\langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle|^2 & \text{(完全性).} \end{cases}$$

完全性の証明に関する補足: $\alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C} \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とおくと,

$$\begin{cases} |\alpha|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2, \\ |\beta|^2 = \beta \cdot \bar{\beta} = (c + di) \cdot (c - di) = c^2 + d^2, \\ \alpha \cdot \bar{\beta} = (a + bi) \cdot (c - di) = (ac + bd) + (bc - ad)i \quad (\implies ac + bd = \operatorname{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta})) \end{cases}$$

である($\alpha \cdot \bar{\beta}$ の代わりに $\bar{\alpha} \cdot \beta$ を計算してもよい)。このとき,

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta) \cdot \overline{(\alpha + \beta)} \\ &= ((a + bi) + (c + di)) \cdot \overline{((a + bi) + (c + di))} \\ &= ((a + c) + (b + d)i) \cdot ((a + c) - (b + d)i) \\ &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta}). \end{aligned}$$

以上を念頭において、 $|\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle + \overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle|^2$ を計算すればよい。

$$\left(\begin{array}{l} \overline{u_{11}}, \overline{u_{12}}, \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle, \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle \in \mathbb{C} \text{ より, } \overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle, \overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle \in \mathbb{C} \text{ となることに注目する.} \\ \text{言い換えれば, } \alpha = \overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle, \beta = \overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle \text{ だと思って計算しなさいということ.} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} |\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle + \overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle|^2 &= |\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + |\overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle|^2 + 2\operatorname{Re} \left((\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle) \cdot \overline{(\overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle)} \right) \\ &= |\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + |\overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle|^2 + 2\operatorname{Re} \left((\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle) \cdot (u_{12} \cdot \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle}) \right) \\ &= |\overline{u_{11}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle|^2 + |\overline{u_{12}} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{u_{11}} \cdot u_{12} \cdot \langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_1 \rangle \cdot \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{e}_2 \rangle}). \end{aligned}$$

* 問題1(証明にはコレも必要): $\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta = \operatorname{Re}(\alpha + \beta)$ を証明せよ。

* 問題2(証明にはコレも必要): $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ および $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ および $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ を証明せよ。

参考(線形代数学序論演習, 1.1.2 演算, A (3)): 複素数 $\alpha = a + bi$ において, a を複素数 α の実部(real part), b を複素数 α の虚部(imaginary part) といい, それぞれ

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} \alpha \quad (\text{記号 Re の意味は real part の頭 2 文字}), \\ b &= \operatorname{Im} \alpha \quad (\text{記号 Im の意味は imaginary part の頭 2 文字}) \end{aligned}$$

と定義する。