

# 線形代数学Iおよび線形代数学I演習

11月29日(月)に実施された線形代数学IのQuiz(小テスト)は, [定理] 正規直交基底の性質を覚えていれば難なく解けた問題です. 日ごろから久保先生の教育用ホームページや私のサポートページをチェックし, 予習・復習をしっかりとっておきましょう.

[定義] 部分空間の正規直交基底. 「ユニタリ空間  $C^n$  の部分空間」 $\mathcal{L}$  に対して縦ベクトル  $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathcal{L}$  が「 $\mathcal{L}$  の正規直交基底である」とは以下の(3つの)条件を満たすことである:

- 正規性:  $\|x_1\| = 1, \|x_2\| = 1, \dots, \|x_d\| = 1.$
- 直交性:  $x_j \perp x_k \quad (1 \leq j < k \leq d).$
- 完全性:  $y \in \mathcal{L} \implies \|y\|^2 = \sum_{k=1}^d |\langle y | x_k \rangle|^2. \quad \leftarrow$  [注意]

[定理] 正規直交基底の性質. 「ユニタリ空間  $C^n$  の部分空間」 $\mathcal{L}$  に対して縦ベクトル  $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathcal{L}$  が「 $\mathcal{L}$  の正規直交基底である」とき,

$$y \in \mathcal{L} \implies y = \sum_{k=1}^d \langle y | x_k \rangle \cdot x_k. \quad \leftarrow$$
 [注意]

\* この定理の証明は, 講義の時間に行いました. ノートを読み返しておくこと!

上記は, 久保先生の教育用ホームページの

講義の参考 [第3章第3節] (PDF-file)(2004.11.17 配布)

[http://www.sci.toyama-u.ac.jp/~fkubo/2004s/LA2004s/3\\_03.pdf](http://www.sci.toyama-u.ac.jp/~fkubo/2004s/LA2004s/3_03.pdf)

の「2.3.2 正規直交基底 (4 ページ)」から抜粋したものです. なお, [定理] 正規直交基底の性質に書かれている数式と [定義] 部分空間の正規直交基底の完全性に書かれている数式はよく似ていますが, 異なるものです. その違いをはっきり理解し, 正しく使えるようにしておきましょう.

久保先生の教育用ホームページ:

<http://www.sci.toyama-u.ac.jp/~fkubo/2004s/LA2004s/LA2004s.htm>

幸山のサポートページ:

<http://kouyama.math.toyama-u.ac.jp/main/education/2004/liner2/index.htm>