線形代数学Iおよび線形代数学I演習

12 月 13 日 (月) に実施された線形代数学 I の Quizz(小テスト) の採点基準は以下のとおりです. なお, 採点の結果, 満点の 7 点が 2 名, 6 点が 2 名, 5 点が 3 名でした.

「● $\mathcal{N}(A)$ を求める.」 以下に類似する簡潔な形で記述してあれば 1 点;

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \xi_1 = 0,\ 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 = 0 \right\} \quad \text{or}$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 = 0 \right\} \quad \text{or}$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{2\xi_3 + 3\xi_4}{2} \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi_3,\ \xi_4 \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{or} \quad \cdots .$$

「● $\mathcal{N}(A)$ の基底を求める.」 $\mathcal{N}(A)$ に属す非零ベクトル $\boldsymbol{x}_1(\neq 0)$ が見つけられたら 1 点. 「$\mathcal{N}(A)$ に属し」かつ「$\boldsymbol{x}_1$ のスカラー倍全体からなる部分空間 $\mathcal{L}_1 = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{C}\}$ に属さない」非零ベクトル $\boldsymbol{x}_2(\neq 0)$ が見つけられたら更に+1 点 (ただし, $\boldsymbol{x}_2 \notin \mathcal{L}_1$ が明記してあること). 「$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ の線形結合全体からなる部分空間 $\mathcal{L}_2 = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \mid \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$」と $\mathcal{N}(A)$ が等しいことを証明してあれば+1 点. 以上 3 点.

「● $\mathcal{N}(A)$ の基底からグラム・シュミットの正規直交化法に従って $\mathcal{N}(A)$ の正規直交基底を求める.」 前問で求めた部分空間 $\mathcal{N}(A)$ の基底 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を使って, 以下の手順で正しく正規直交基底を求められれば 3 点 (ただし, 少々の計算マチガイであればオマケでマルを付けました);

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\|\ \boldsymbol{x}_1\ \|} \boldsymbol{x}_1$ (正規性), ←ここまで出来ていれば 1 点

$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1$ (直交性と完全性),

$\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{\|\ \boldsymbol{y}_2\ \|} \boldsymbol{y}_2$ (正規性), ←更に, ここまで出来ていれば + 1 点

以上より, $\mathcal{N}(A)$ の正規直交基底は, $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ である. ←全て正解であれば + 1 点 (満点賞)

次回小テストについて： 12 月 17 日 (金) に実施予定の演習の小テストについて, 12 月 13 日 (月) の講義の終わりに久保先生から大きなヒントが出ています. 満点を取るチャンス!

ひと口メモ： 小テストで満点の解答には「*Very good.*」と書くようにしました. なお, これまでの小テストの採点に疑問のある方は, 気軽に幸山までどうぞ.

幸山直人

2004 年 12 月 14 日