線形代数学Iおよび線形代数学I演習

12 月 17 日 (金) に実施された線形代数学 I 演習の Quizz(小テスト) の採点基準は以下のとおりです. なお, 行列 A によって定まる線形変換の**核** $\mathcal{N}(A)$ と**値域** $\mathcal{R}(A)$ の定義 (意味) をしっかり覚えておきましょう:

復習 $n \times n$ 行列 A によって定まる線形変換の「**核**」と「**値域**」はそれぞれ

$$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}, \qquad \Longleftarrow \text{核}$$

$$\mathcal{R}(A) = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\} \qquad \Longleftarrow \text{値域}$$

で定義される.

「● $\mathcal{R}(A)$ を求める.」 以下に類似する簡潔な形で記述してあれば 1 点;

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 \\ 2\xi_1 \\ 3\xi_1 \\ 4\xi_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4 \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{or}$$

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \\ 2\mu_1 \\ 3\mu_1 \\ 4\mu_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{C} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \because\ \xi_1,\ 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 \in \mathbb{C}\text{ より, 改めて} \\ \xi_1 = \mu_1,\ \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \mu_2\text{と置ける.} \end{array} \right) \quad \text{or} \quad \cdots.$$

「● $\mathcal{R}(A)$ の基底を求める.」 $\mathcal{R}(A)$ に属す非零ベクトル $\boldsymbol{x}_1 (\neq 0)$ が見つけられたら 1 点. 「$\mathcal{R}(A)$ に属し」かつ「$\boldsymbol{x}_1$ のスカラー倍全体からなる部分空間 $\mathcal{L}_1 = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{C}\}$ に属さない」非零ベクトル $\boldsymbol{x}_2 (\neq 0)$ が見つけられたら更に+1 点 (ただし, $\boldsymbol{x}_2 \notin \mathcal{L}_1$ が明記してあること). 「$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ の線形結合全体からなる部分空間 $\mathcal{L}_2 = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \mid \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$」と $\mathcal{R}(A)$ が等しいことを証明してあれば+1 点. 以上 3 点.

注意 $\mathbb{C}^n$ の部分空間 $\mathcal{R}(A)$ の基底の数は行列 A によって定まり (行列が変われば基底の数も変わる),

$$\mathcal{R}(A) = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_d \boldsymbol{x}_d \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d \in \mathbb{C}\}$$

となるまで 基底を構成するための縦ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$ を順に見つけて行く必要がある ($\mathbb{C}^n$ の部分空間 $\mathcal{N}(A)$ の基底も同様).

「● $\mathcal{R}(A)$ の基底からグラム・シュミットの正規直交化法に従って $\mathcal{R}(A)$ の正規直交基底を求める.」 前問で求めた部分空間 $\mathcal{R}(A)$ の基底 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を使って, 以下の手順で正しく正規直交基底を求められれば 3 点;

$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\|\ \boldsymbol{x}_1\ \|}\boldsymbol{x}_1$ (正規性), ←ここまで出来ていれば 1 点

$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1$ (直交性と完全性),

$\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{\|\ \boldsymbol{y}_2\ \|}\boldsymbol{y}_2$ (正規性), ←更に, ここまで出来ていれば $+1$ 点

以上より, $\mathcal{R}(A)$ の正規直交基底は, $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$である. ←全て正解であれば $+1$ 点 (満点賞)

幸山直人

2004 年 12 月 18 日 (2005 年 1 月 13 日修正)