

2　行列式論

2.11.1　行列式の余因子展開

C　展開定理　$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{kj} = \delta_{ik}\det A$,　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ik} = \delta_{jk}\det A$　を用いて次の行列の行列式を求めよ.

↑ 行に関する展開　　　↑ 列に関する展開

$\boxed{\text{注意}}$　変数 i と虚数単位 i を混同しないように!

$\boxed{\text{復習}}$　クロネッカーのデルタ:　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$

$\boxed{\text{展開定理を使って行列の行列式を求めるには}}$

(第 i 行に関する展開)　$k = i$ の場合を求めればよい.

すなわち, $\displaystyle\det A = \delta_{ii}\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$

(第 j 列に関する展開)　$k = j$ の場合を求めればよい.

すなわち, $\displaystyle\det A = \delta_{jj}\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$

[(1) の解答例]　(第 1 行に関して展開.)

第 1 行に関して展開すると

$$\det \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{10} \end{array}\right)}_{(=A)} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\Delta_{1j} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

である. また, 各余因子は,

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{9}{10}\right) - (-1)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{7}{4},$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{5}{7} & -\frac{9}{10} \end{pmatrix} = -\left(1\cdot\left(-\frac{9}{10}\right) - (-1)\cdot\left(\frac{5}{7}\right)\right) = \frac{13}{70},$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = 1\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}\right) = -\frac{103}{70}$$

である．従って，

$$(\text{与式}) \quad = \quad \left(\frac{7}{6}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{13}{70}\right)+1\cdot\left(-\frac{103}{70}\right) \quad = \quad -\frac{2873}{840}. \quad \blacksquare$$

[(2) の解答例] (第 2 行に関して展開.)

第 2 行に関して展開すると

$$\det\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} -\frac{5}{3}-4i & -2+\frac{i}{5} & \frac{2}{5}+\frac{i}{4} \\ \hline -\frac{1}{5} & 3+\frac{i}{2} & 1+\frac{i}{5} \\ \hline \frac{3}{2} & -4+\frac{3i}{2} & \frac{i}{5} \end{array}\right)}_{(=A)} \quad = \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2j}\Delta_{2j} \quad = \quad a_{21}\Delta_{21}+a_{22}\Delta_{22}+a_{23}\Delta_{23}$$

である．また，各余因子は，

$$\begin{aligned}
\Delta_{21} \quad &= \quad (-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix} -2+\frac{i}{5} & \frac{2}{5}+\frac{i}{4} \\ -4+\frac{3i}{2} & \frac{i}{5} \end{pmatrix} \\
&= \quad -\left(\left(-2+\frac{i}{5}\right)\cdot\left(\frac{i}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{4}\right)\cdot\left(-4+\frac{3i}{2}\right)\right) \quad = \quad -\frac{387}{200}, \\
\Delta_{22} \quad &= \quad (-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix} -\frac{5}{3}-4i & \frac{2}{5}+\frac{i}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{i}{5} \end{pmatrix} \\
&= \quad \left(-\frac{5}{3}-4i\right)\cdot\left(\frac{i}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) \quad = \quad \frac{1}{5}-\frac{17i}{24}, \\
\Delta_{23} \quad &= \quad (-1)^{2+3}\cdot\det\begin{pmatrix} -\frac{5}{3}-4i & -2+\frac{i}{5} \\ \frac{3}{2} & -4+\frac{3i}{2} \end{pmatrix} \\
&= \quad -\left(\left(-\frac{5}{3}-4i\right)\cdot\left(-4+\frac{3i}{2}\right)-\left(-2+\frac{i}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right) \quad = \quad -\frac{47}{3}-\frac{66i}{5}
\end{aligned}$$

である．従って，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) \quad &= \quad \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{387}{200}\right)+\left(3+\frac{i}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{17i}{24}\right)+\left(1+\frac{i}{5}\right)\cdot\left(-\frac{47}{3}-\frac{66i}{5}\right) \\
&= \quad -\frac{23371}{2000}-\frac{2203i}{120}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

[(3) の解答例]　(第 3 行に関して展開.)

第 3 行に関して展開すると

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ \hline 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_{(=A)} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}\Delta_{3j} = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} + a_{34}\Delta_{34}$$

である. また, 各余因子は,

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2},$$

$$\Delta_{34} = (-1)^{3+4}\cdot\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\because \text{ 第 1 行と第 3 行が同じ.})$$

である. 従って,

$$(\text{与式}) = \left(0\cdot\Delta_{31} + \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right) + 0\cdot\Delta_{33} + 1\cdot 0\right) = \frac{15}{8}. \quad \blacksquare$$

[(4) の解答例]　(第 4 列に関して展開.)

第 4 列に関して展開すると

$$\det\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2-i & \frac{1}{2}+2i & \frac{1}{2}-\frac{i}{3} & -\frac{2}{3}-\frac{2i}{3} \\ \frac{1}{3}+\frac{2i}{3} & 2+2i & \frac{2i}{3} & -2+\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{3}-2i & \frac{2}{3}-\frac{i}{2} & \frac{2}{3}-2i & -i \\ \frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{1}{2}-i & -\frac{2}{3}-\frac{i}{2} \end{array}\right)}_{(=A)}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} a_{i4}\Delta_{i4} = a_{14}\Delta_{14} + a_{24}\Delta_{24} + a_{34}\Delta_{34} + a_{44}\Delta_{44}$$

である. また, 各余因子は,

$$\Delta_{14} = (-1)^{1+4}\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2i}{3} & 2+2i & \frac{2i}{3} \\ -\frac{1}{3}-2i & \frac{2}{3}-\frac{i}{2} & \frac{2}{3}-2i \\ \frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix} = -\frac{152}{27}-\frac{935i}{108},$$

$$\Delta_{24} = (-1)^{2+4}\cdot\det\begin{pmatrix} 2-i & \frac{1}{2}+2i & \frac{1}{2}-\frac{i}{3} \\ -\frac{1}{3}-2i & \frac{2}{3}-\frac{i}{2} & \frac{2}{3}-2i \\ \frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix} = -\frac{7}{9}+\frac{35i}{6},$$

$$\Delta_{34} = (-1)^{3+4}\cdot\det\begin{pmatrix} 2-i & \frac{1}{2}+2i & \frac{1}{2}-\frac{i}{3} \\ \frac{1}{3}+\frac{2i}{3} & 2+2i & \frac{2i}{3} \\ \frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix} = -\frac{455}{108}+\frac{463i}{54},$$

$$\Delta_{44} = (-1)^{4+4}\cdot\det\begin{pmatrix} 2-i & \frac{1}{2}+2i & \frac{1}{2}-\frac{i}{3} \\ \frac{1}{3}+\frac{2i}{3} & 2+2i & \frac{2i}{3} \\ -\frac{1}{3}-2i & \frac{2}{3}-\frac{i}{2} & \frac{2}{3}-2i \end{pmatrix} = \frac{190}{27}-\frac{893i}{108}$$

である. 従って,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left(-\frac{2}{3}-\frac{2i}{3}\right)\cdot\left(-\frac{152}{27}-\frac{935i}{108}\right)+\left(-2+\frac{i}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{9}+\frac{35i}{6}\right) \\ &\quad +(-i)\cdot\left(-\frac{455}{108}+\frac{463i}{54}\right)+\left(-\frac{2}{3}-\frac{i}{2}\right)\cdot\left(\frac{190}{27}-\frac{893i}{108}\right) \\ &= -\frac{2353}{648}+\frac{397i}{108}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

[(5) の解答例]

第 1 行に関して展開すると

$$\det \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{(=A)} = \sum_{j=1}^{5} a_{1j}\Delta_{1j} = a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+a_{13}\Delta_{13}+a_{14}\Delta_{14}+a_{15}\Delta_{15}$$

である. また, 各余因子は,

$$\begin{aligned}
\Delta_{12} &= (-1)^{1+2}\cdot\det\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(第 4 行に関して展開.)} \\
&= (-1)\cdot\left(1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+2}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= (-1)\cdot((-1)\cdot(1-1)+1\cdot(2-1)) = -1
\end{aligned}$$

である. 従って,

$$(\text{与式}) = 0\cdot\Delta_{11}+1\cdot(-1)+0\cdot\Delta_{13}+0\cdot\Delta_{14}+0\cdot\Delta_{15} = -1. \quad \blacksquare$$

幸山直人
2004 年 10 月 30 日