

線形代数学Iおよび線形代数学I演習

11月5日(金)に実施された線形代数学I演習のQuiz(小テスト)の復習.

クラメルの公式

$$x, y, z \text{ を未知数とする連立方程式 } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \text{ をクラメルの公式を使って解く.}$$

$\iff$ 連立方程式が一意の解を持つ ($\iff \det A \neq 0$).

(解説) 先ず, 上記の連立方程式の係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と置く (クラメルの公式を利用するには, 係数行列が**正方行列**でなければならない). 次に, $\det A$ を計算する. もし, $\det A \neq 0$ ならば, クラメルの公式によって, 一意の解

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} \boxed{b_1} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \\ y = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{b_1} & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \\ z = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

が得られる.

(2) の $\det A$ の因数分解

$$\begin{aligned} \text{例えば, } \det A &= bc^2 + ab^2 + ca^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2 \\ &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc^2 - cb^2 \quad (a \text{ に注目.}) \\ &= (c-b)a^2 + (b-c)(b+c)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \quad ((c-b) \text{ でくくる.}) \\ &= (c-b)\{(a-b)(a-c)\} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$