2006年度 情報数理　レポート3　学生用

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2006年11月29日(水) 17:00まで
提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

(1) このページを印刷し、必要事項を記入の上(学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。

(2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し~~(問→解答→問→解答→ ⋯ の順になるように記述すること)、A4サイズの用紙~~に印刷して提出すること(手書きは不可)。~~

(3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止**。

(4) 情報数理について、あなたの声を聞かせてください(教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ(成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人
出題日： 2006年11月16日(木)

得点：　　/6

－－－－－－－－－－－－－－－ 切り取り線 －－－－－－－－－－－－－－－

2006年度 情報数理　レポート3　教員控

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

協力者氏名：　　　　　　,　　　　　　,

レポート作成に要した時間：　　　.　　　時間

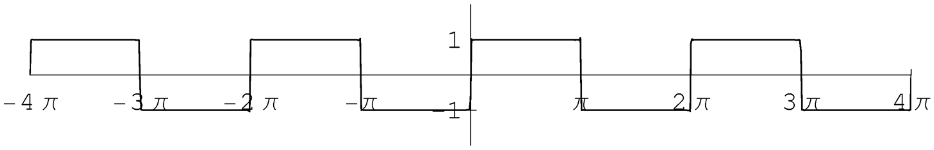
得点：　　/6

意見・質問：

$\boxed{\textbf{問 1}}$　周期 2π を持つ奇関数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-\pi\le x<0),\\ 1 & (0\le x<\pi)\end{cases}$$

のフーリエ正弦級数を求めなさい。(2 点)



解答例　奇関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\qquad (k=1,2,3,\cdots)\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{2}{k\pi}(-\cos k\pi-(-1))\\&=2\,\frac{(1-(-1)^k)}{k\pi}\end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2π を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}2\,\frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx$$

となる。

＊上記の関数は正確な奇関数ではありませんが、関数の不連続点 0 におけるフーリエ級数の収束点は

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

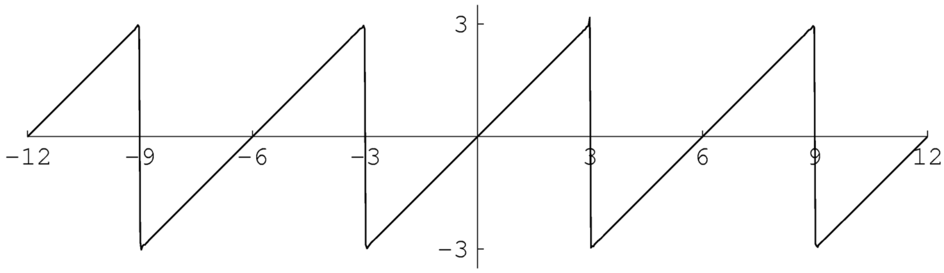
となるため、奇関数と同等に扱うことができます。

評価基準　解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 2 周期 6 を持つ奇関数

$$f(x) = x \quad (-3 \leq x < 3)$$

のフーリエ正弦級数を求めなさい。(2 点)



解答例 奇関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{k\pi}{3}x\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 x\,\sin\frac{k\pi}{3}x\,dx \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{k\pi}x\left(-\cos\frac{k\pi}{3}x\right)\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3\left(-\cos\frac{k\pi}{3}x\right)dx \\
&= \frac{2}{k\pi}(-3\cos k\pi - 0) - \frac{2}{3}\left[\frac{3}{k\pi}\left(-\sin\frac{k\pi}{3}x\right)\right]_0^3 \\
&= \frac{-6\cos k\pi}{k\pi} - (0-0) \\
&= 6\,\frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}
\end{aligned}$$

となる。したがって、周期 6 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 6\,\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\,\sin\frac{n\pi}{3}x$$

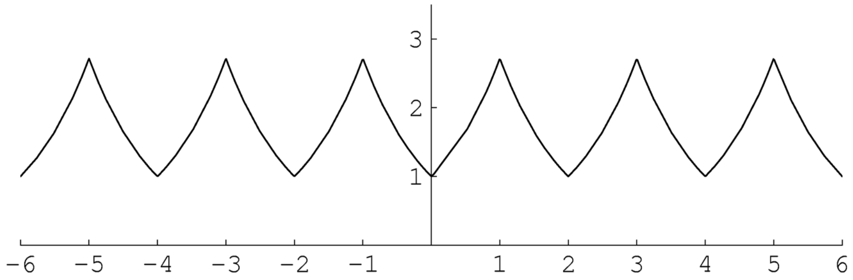
となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

$\boxed{\textbf{問 3}}$　周期 2 を持つ偶関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (-1 \leq x < 0), \\ e^{x} & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

のフーリエ余弦級数を求めなさい。(2 点)



解答例　偶関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2\big[e^x\big]_0^1 = 2\,(e-1),$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{k\pi}{1}x\,dx = 2\int_0^1 e^x\cos k\pi x\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\int e^x\cos k\pi x\,dx &= e^x\cos k\pi x - k\pi\int e^x(-\sin k\pi x)\,dx \\ &= e^x\cos k\pi x - k\pi\left(e^x(-\sin k\pi x) - k\pi\int e^x(-\cos k\pi x)\,dx\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\int e^x\cos k\pi x\,dx = \frac{1}{1+k^2\pi^2}(e^x\cos k\pi x + k\pi\,e^x\sin k\pi x) + C \qquad (C\text{ は積分定数})$$

を得る。したがって、フーリエ係数 a_k は、

$$\begin{aligned}a_k &= 2\,\frac{1}{1+k^2\pi^2}\big[e^x\cos k\pi x + k\pi\,e^x\sin k\pi x\big]_0^1 \\ &= 2\,\frac{1}{1+k^2\pi^2}(e\,\cos k\pi - 1) = 2\,\frac{(-1)^k e - 1}{1+k^2\pi^2}\end{aligned}$$

となり、周期 2 を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim (e-1) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{(-1)^n e - 1}{1+n^2\pi^2}\,\cos n\pi x$$

となる。

評価基準　解答例に準じた解答であれば 2 点。