2006年度 情報数理　レポート4　学生用

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限：2006年12月6日(水) 17:00まで
提出場所：理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

(1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。

(2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し~~ (問→解答→問→解答→ ··· の順になるように記述すること)、A4サイズの用紙~~に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~

(3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止**。

(4) 情報数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者：幸山 直人
出題日：2006年11月30日(木)

得点：　/6

－－－－－－－－ 切り取り線 －－－－－－－－

2006年度 情報数理　レポート4　教員控

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

協力者氏名：＿＿＿＿＿＿, ＿＿＿＿＿＿, ＿＿＿＿＿＿

レポート作成に要した時間：　　.　　時間

得点：　/6

意見・質問：

$\boxed{\textbf{問 1}}$ 周期 2 を持つ以下の (1)〜(2) の関数のフーリエ級数を求めなさい。さらに、第 7 回の Mathematica によるチェックプログラム (`report03.nb`) を参考に、100 項までのフーリエ級数の部分和のグラフを描きなさい (`l=1;`, `k=100;`)。なお、作成したプログラムと描いたグラフは印刷してレポートに添付すること。(フーリエ級数 : 各 2 点, プログラムとグラフ : 各 1 点)

(1) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & (-1 \leq x < 0), \\ e^{-x} & (0 \leq x < 1) \end{cases}$

解答例 関数 $f(x)$ が偶関数であることに注意すると、フーリエ余弦係数は、

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 e^{-x}\,dx = 2\big[-e^{-x}\big]_0^1 = -2\,(e^{-1}-1) = 2\,(1-e^{-1}),$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{k\pi}{1}x\,dx = 2\int_0^1 e^{-x}\cos k\pi x\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos k\pi x\,dx &= -e^{-x}\cos k\pi x - k\pi\int -e^{-x}(-\sin k\pi x)\,dx \\ &= -e^{-x}\cos k\pi x - k\pi\int e^{-x}\sin k\pi x\,dx \\ &= -e^{-x}\cos k\pi x - k\pi\left(-e^{-x}\sin k\pi x - k\pi\int -e^{-x}\cos k\pi x\,dx\right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\int e^{-x}\cos k\pi x\,dx = \frac{1}{1+k^2\pi^2}(-e^{-x}\cos k\pi x + k\pi\,e^{-x}\sin k\pi x) + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

を得る。したがって、フーリエ余弦係数 a_k は、

$$\begin{aligned}a_k &= 2\,\frac{1}{1+k^2\pi^2}\big[-e^{-x}\cos k\pi x + k\pi\,e^{-x}\sin k\pi x\big]_0^1 \\ &= 2\,\frac{1}{1+k^2\pi^2}((-e^{-1}\ \cos k\pi + 0) - (-1+0)) = 2\,\frac{1-(-1)^k e^{-1}}{1+k^2\pi^2}\end{aligned}$$

となり、周期 2 を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim (1-e^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{1-(-1)^n e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

となる。

(2)　$f(x) = x^3 \ (-1 \le x < 1)$

解答例　関数 $f(x)$ が奇関数であることに注意すると、フーリエ正弦係数は、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\frac{k\pi}{1}x\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \\ &= 2\int_0^1 x^3 \sin k\pi x\,dx \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin k\pi x\,dx &= x^3\left(\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right) - \int 3x^2\left(\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right)dx \\ &= -\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3}{k\pi}\int x^2\cos k\pi x\,dx \\ &= -\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3}{k\pi}\left(x^2\left(\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right) - \int 2x\left(\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right)dx\right) \\ &= -\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3x^2\sin k\pi x}{k^2\pi^2} - \frac{6}{k^2\pi^2}\int x\sin k\pi x\,dx \\ &= -\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3x^2\sin k\pi x}{k^2\pi^2} - \frac{6}{k^2\pi^2}\left(x\left(\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right) - \int 1\left(\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right)dx\right) \\ &= -\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3x^2\sin k\pi x}{k^2\pi^2} + \frac{6x\cos k\pi x}{k^3\pi^3} - \frac{6}{k^3\pi^3}\int \cos k\pi x\,dx \\ &= -\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3x^2\sin k\pi x}{k^2\pi^2} + \frac{6x\cos k\pi x}{k^3\pi^3} + \frac{6\sin k\pi x}{k^4\pi^4} + C \ (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから、フーリエ正弦係数 b_k は、

$$\begin{aligned} b_k &= 2\left[-\frac{x^3\cos k\pi x}{k\pi} + \frac{3x^2\sin k\pi x}{k^2\pi^2} + \frac{6x\cos k\pi x}{k^3\pi^3} + \frac{6\sin k\pi x}{k^4\pi^4}\right]_0^1 \\ &= 2\left(\left(-\frac{\cos k\pi}{k\pi} + 0 + \frac{6\cos k\pi}{k^3\pi^3} + 0\right) + (0+0+0+0)\right) = 2\,\frac{(-1)^k(6-k^2\pi^2)}{k^3\pi^3} \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

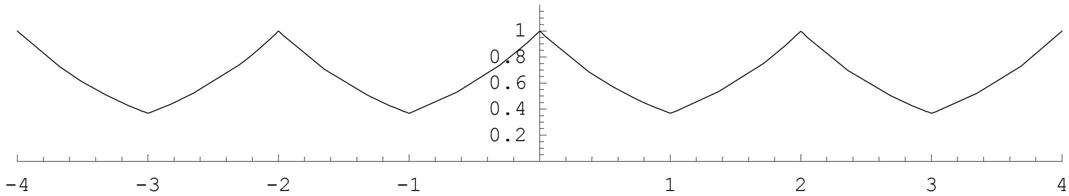
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{(-1)^n(6-n^2\pi^2)}{n^3\pi^3}\sin n\pi x$$

となる。

評価基準　解答例に準じた解答であればフーリエ級数については各 2 点、プログラムとグラフについては各 1 点。

■ 周期2lを持つ関数のフーリエ級数展開（標準プログラム）

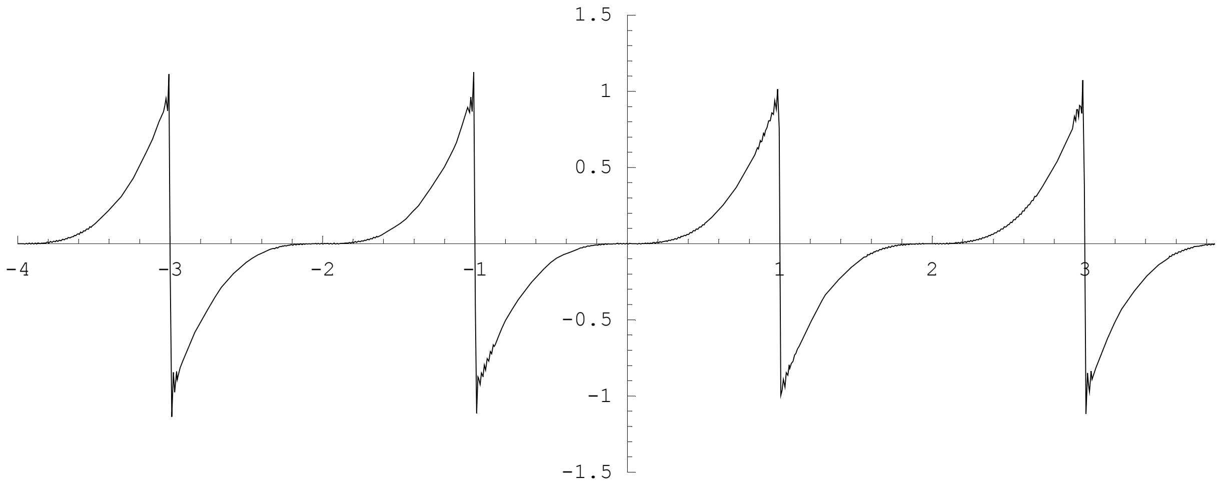
In[1]:=
```
(* 問1 (1) *)
l = 1;
k = 100;
```
$$f[x\_] := (1 - e^{-1}) + \sum_{n=1}^{k} \left(2\, \frac{1 - (-1)^n e^{-1}}{1 + n^2 \pi^2} \mathrm{Cos}[n\,\pi\,x]\right);$$
```
Plot[f[x], {x, -4 l, 4 l}, AspectRatio → Automatic,
 ImageSize → {600, Automatic}, PlotRange → {{-4 l, 4 l}, {0, 1.2}}]
```



Out[4]= - Graphics -

■ 周期2lを持つ関数のフーリエ級数展開（標準プログラム）

In[5]:=
```
(* 問1 (2) *)
l = 1;
k = 100;
```
$$f[x\_] := \sum_{n=1}^{k} \left(2\, \frac{(-1)^n (6 - n^2 \pi^2)}{n^3 \pi^3} \mathrm{Sin}\,[n\,\pi\,x]\right);$$
```
Plot[f[x], {x, -4 l, 4 l}, AspectRatio → Automatic,
 ImageSize → {600, Automatic}, PlotRange → {{-4 l, 4 l}, {-1 - 0.5, 1 + 0.5}}]
```



Out[8]= - Graphics -