

2006 年度 情報数理 レポート 5

学生用

学籍番号： _____

氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2006 年 12 月 21 日 (水) 12:00 まで

提出場所： 理学部端末室 幸山まで

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は 2 箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し (問→解答→問→解答→… の順になるように記述すること)、A4 サイズの用紙に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 情報数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人

出題日： 2006 年 12 月 21 日 (木)

得点：

/ 6

----- 切り取り線 -----

2006 年度 情報数理 レポート 5

教員控

学籍番号： _____

氏名： _____

協力者氏名： _____ , _____ , _____

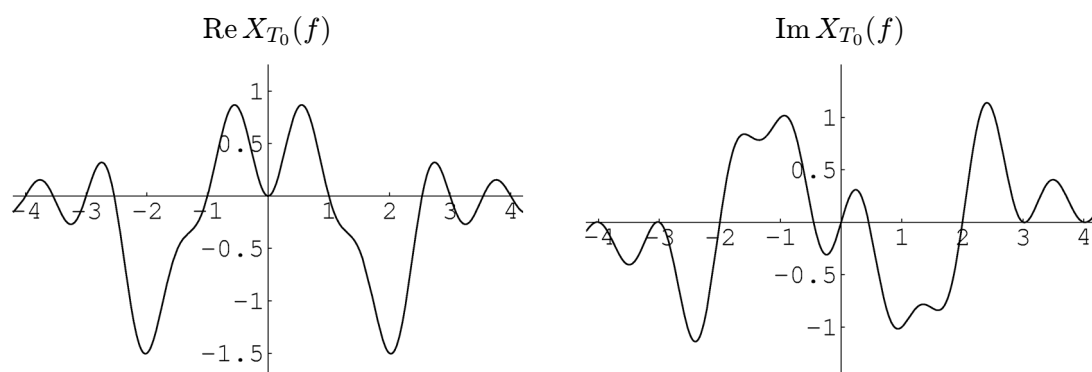
レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：

/ 6

意見・質問：

問 1 周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。(2 点)



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	$\frac{8}{3\pi}$	0	$-\frac{8}{5\pi}$	-1.5	$-\frac{8}{21\pi}$	0	$-\frac{8}{45\pi}$	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	$\mp \frac{2}{5\pi}$	∓ 1	$\mp \frac{18}{7\pi}$	0	$\pm \frac{10}{3\pi}$	0	$\pm \frac{14}{11\pi}$	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。したがって、周波数が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_4 = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_4 = 2\pi f_4 = \pm 4\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\cos$ 波形の波を含み、その振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(2) + \text{Re } X_{T_0}(-2) = -1.5 + (-1.5) = -3$$

となる。同様に、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、その振幅は、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -3 \cos 4\pi t + 2 \sin 2\pi t$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 2 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 2$ および ± 3 [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 2) = -1 \mp i\sqrt{3}$ (符号同順) および $X_{T_0}(\pm 3) = \mp i$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 A (> 0), 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $A \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。(2 点)

解答例 周波数 $f = \pm 2$ [Hz] のとき、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 4\pi$ [rad/秒] で、振幅 A および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$A = |X_{T_0}(2)| + |X_{T_0}(-2)| = |-1 - i\sqrt{3}| + |-1 + i\sqrt{3}| = 2 + 2 = 4,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(2) = \arg(-1 - i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$$

である。同様に、周波数 $f' = \pm 3$ [Hz] のとき、角速度 $\omega' = 2\pi f' = \pm 6\pi$ [rad/秒] で、振幅 A' および初期位相 ϕ' [rad] は、それぞれ、

$$A' = |X_{T_0}(3)| + |X_{T_0}(-3)| = |-i| + |i| = 1 + 1 = 2,$$

$$\phi' = \arg X_{T_0}(3) = \arg(0 - i) = -\frac{\pi}{2}$$

である。以上より、ある波は、

$$x(t) = 4 \cos\left(4\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 3 等式 $\overline{X_{T_0}(f)} = X_{T_0}(-f)$ かつ等式

$$\begin{cases} A = \operatorname{Re} X_{T_0}(f) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-f), \\ B = -\operatorname{Im} X_{T_0}(f) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-f) \end{cases}$$

を満たすとき、等式

$$\begin{cases} \frac{A - iB}{2} = X_{T_0}(f), \\ \frac{A + iB}{2} = X_{T_0}(-f) \end{cases}$$

を証明しなさい。(2 点)

解答例

$$\begin{aligned} \frac{A - iB}{2} &= \frac{(\operatorname{Re} X_{T_0}(f) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-f)) - i(-\operatorname{Im} X_{T_0}(f) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-f))}{2} \\ &= \frac{(\operatorname{Re} X_{T_0}(f) + i\operatorname{Im} X_{T_0}(f)) + (\operatorname{Re} X_{T_0}(-f) - i\operatorname{Im} X_{T_0}(-f))}{2} \\ &= \frac{X_{T_0}(f) + \overline{X_{T_0}(-f)}}{2} \\ &= \frac{X_{T_0}(f) + X_{T_0}(f)}{2} \quad (\because X_{T_0}(f) = \overline{\overline{X_{T_0}(f)}} = \overline{X_{T_0}(-f)}) \\ &= X_{T_0}(f). \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \frac{A + iB}{2} &= \frac{(\operatorname{Re} X_{T_0}(f) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-f)) + i(-\operatorname{Im} X_{T_0}(f) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-f))}{2} \\ &= \frac{(\operatorname{Re} X_{T_0}(f) - i\operatorname{Im} X_{T_0}(f)) + (\operatorname{Re} X_{T_0}(-f) + i\operatorname{Im} X_{T_0}(-f))}{2} \\ &= \frac{\overline{X_{T_0}(f)} + X_{T_0}(-f)}{2} \\ &= \frac{X_{T_0}(-f) + X_{T_0}(-f)}{2} \quad (\because \overline{X_{T_0}(f)} = X_{T_0}(-f)) \\ &= X_{T_0}(-f). \end{aligned}$$

■

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。