

2006 年度 情報数理 レポート 6

学生用

学籍番号： _____

氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2007 年 1 月 24 日 (水) 17:00 まで

提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は 2 箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し (問→解答→問→解答→… の順になるように記述すること)、A4 サイズの用紙に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 情報数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人

出題日： 2007 年 1 月 18 日 (木)

得点：

/6

----- 切り取り線 -----

2006 年度 情報数理 レポート 6

教員控

学籍番号： _____

氏名： _____

協力者氏名： _____ , _____ , _____

レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：

/6

意見・質問：

問 1 ある波 $x(t)$ を 1 [秒] (区間 $[0, 1]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、データ (離散的な数値列; 離散化された波)

$$(\text{データ}) = \{ 0, -2, 0, 2 \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。
(2 点)

解答例 $T_0 = 1$ より、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。さらに、 $N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$\begin{aligned} X_{T_0}(k\Delta f) &= \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n W_4^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ i4 \\ 0 \\ -i4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-1	0	1	2
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	-1	0	1	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 1$ [Hz]) の sin 波形の波であることがわかる。なお、sin 波形の波の振幅は、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(1) + (-1) = -2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -2 \sin 2\pi t$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 2 ある波 $x(t)$ を 0.5 [秒] (区間 $[0, 0.5]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、データ (離散的な数値列; 離散化された波)

$$(\text{データ}) = \{ 2, -1, 0, -1 \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。
(2 点)

解答例 $T_0 = 0.5$ より、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0.5} = 2$ [Hz] である。さらに、 $N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$\begin{aligned} X_{T_0}(k\Delta f) &= \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n W_4^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-2	0	2	4
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	0.5	0	0.5	1
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm 4\pi$ [rad/秒] (周波数 $f_1 = \pm 2$ [Hz]) および角速度 $\omega_2 = 2\pi f_2 = 8\pi$ [rad/秒] (周波数 $f_2 = 4$ [Hz]) の 2 つの $\cos$ 波形の波を合わせた波であることがわかる。なお、 $\cos$ 波形の波のそれぞれの振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(2) + \text{Re } X_{T_0}(-2) = 0.5 + 0.5 = 1,$$

$$\text{Re } X_{T_0}(4) + \text{Re } X_{T_0}(-4) = 1 + 0 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos 4\pi t + \cos 8\pi t$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 3 周波数分解能 $\Delta f = 0.5$ [Hz] の離散化されたスペクトルを

$$(\text{離散化されたスペクトル}) = \{ 1, -1, 0, -1 \} (= \{ X_0, X_1, X_2, X_3 \})$$

とする。テキストの離散フーリエ積分の定義にしたがって、離散化されたスペクトルの離散フーリエ積分 x_n ($n = 0, 1, 2, 3$) を求めなさい。(2 点)

解答例 離散フーリエ積分の定義より、

$$x_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

である。 $N = 4$ かつ $T_0 = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{0.5} = 2$ [秒] より、離散フーリエ積分を行列の形式で表現すると、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_4'^0 & W_4'^0 & W_4'^0 & W_4'^0 \\ W_4'^0 & W_4'^1 & W_4'^2 & W_4'^3 \\ W_4'^0 & W_4'^2 & W_4'^4 & W_4'^6 \\ W_4'^0 & W_4'^3 & W_4'^6 & W_4'^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

となる。さらに、関係式 $W_4'^4 = 1$ と数値

$$W_4'^0 = 1, W_4'^1 = i, W_4'^2 = -1, W_4'^3 = -i$$

を適用すると (離散フーリエ変換の W_N とは逆回転となることに注意)、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、離散フーリエ積分 x_n ($n = 0, 1, 2, 3$) は、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。