

2006 年度 情報数理 期末試験 (その 1)

学籍番号 : _____

氏名 : _____

問題 1 周期 4 を持つ奇関数

$$f(x) = x \quad (-2 \leq x < 2)$$

のフーリエ正弦級数を求めなさい。(15 点)

解答例 奇関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \int_0^2 x \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x \, dx \\ &= \left[x \cdot \frac{2}{k\pi} \left(-\cos \frac{k\pi}{2} x \right) \right]_0^2 - \int_0^2 x' \cdot \frac{2}{k\pi} \left(-\cos \frac{k\pi}{2} x \right) \, dx \\ &= \frac{2}{k\pi} (-2 \cos k\pi - 0) + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \cos \frac{k\pi}{2} x \, dx \\ &= \frac{-4 \cos k\pi}{k\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[\frac{2}{k\pi} \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x \right]_0^2 \\ &= \frac{-4(-1)^k}{k\pi} + (0 - 0) \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\ &= 4 \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi} \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 4 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} x$$

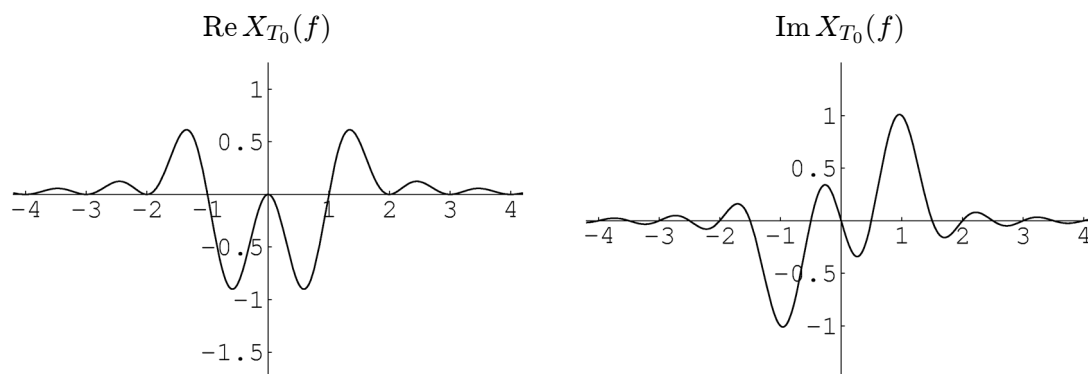
となる。

2006年度 情報数理 期末試験 (その2)

学籍番号：

氏名：

問題 2 周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。(15 点)



周波数 f [Hz]	0	± 1.0	± 2.0	± 3.0	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	0	0	0	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	± 1.0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。したがって、周波数が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は $\cos$ 波形の波を含まない。また、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、その振幅は、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(+1.0) + (-1.0) = -2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -2 \sin 2\pi t$$

である。

2006 年度 情報数理 期末試験 (その 3)

学籍番号：

氏名：

問題 3 ある波 $x(t)$ を 4 [秒] (区間 $[0, 4]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、データ (離散的な数値列; 離散化された波)

$$(\text{データ}) = \{ 0, -8, 0, 8 \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。
(15 点)

解答例 $T_0 = 4$ より、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{4} = 0.25$ [Hz] である。さらに、 $N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$\begin{aligned} X_{T_0}(k\Delta f) &= \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n W_4^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ i16 \\ 0 \\ -i16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i4 \\ 0 \\ -i4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-0.25	0	0.25	0.5
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	-4	0	4	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm \frac{\pi}{2}$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 0.25$ [Hz]) の sin 波形の波であることがわかる。なお、sin 波形の波の振幅は、

$$-\text{Im } X_{T_0}(0.25) + \text{Im } X_{T_0}(-0.25) = -(4) + (-4) = -8$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -8 \sin \frac{\pi}{2} t$$

である。

2006 年度 情報数理 期末試験 (その 4)

学籍番号： _____

氏名： _____

問題 4 区間 $[0, T_0]$ における離散フーリエ変換および離散フーリエ積分の行列形式による表現をそれぞれ行列 A および行列 B とする。 $N = 4$ の場合について、行列 A および行列 B を具体的に描き、さらに、行列 A の逆行列が行列 B であることを示しなさい ($B = A^{-1}$)。 (15 点)

解答例 離散フーリエ変換および離散フーリエ積分の定義より、行列 A および行列 B は、

$$A = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

である。また、 I を 4 次の単位行列とすると、

$$A \cdot B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I$$

となるから、行列 A の逆行列は行列 B である。