

■□■ フーリエ級数展開のまとめ ■□■

© 2006 Naoto KOUYAMA

		フーリエ級数展開		複素フーリエ級数展開	
		フーリエ級数	フーリエ係数	複素フーリエ級数	複素フーリエ係数
周期 2π		$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$	$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$	$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$
	偶関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$	$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$		$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) (e^{ikx} + e^{-ikx}) \, dx$
	奇関数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$	$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$		$c_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) (e^{ikx} - e^{-ikx}) \, dx$
周期 $2L$		$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right)$	$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x \, dx,$ $b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x \, dx$	$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$	$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L}x} \, dx$
	偶関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x$	$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x \, dx$		$c_k = \frac{1}{2L} \int_0^L f(x) (e^{i\frac{k\pi}{L}x} + e^{-i\frac{k\pi}{L}x}) \, dx$
	奇関数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}x$	$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x \, dx$		$c_k = -\frac{1}{2L} \int_0^L f(x) (e^{i\frac{k\pi}{L}x} - e^{-i\frac{k\pi}{L}x}) \, dx$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \\ c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$