

第1章 波

1.1 周期関数と三角関数

関数 (波) の中には、図 1.1 のように一定の間隔で同じ波形を繰り返す関数があります。このような関数を**周期関数**と呼び、これら周期関数が持つ一定の間隔を**周期**と呼びます¹。このテキストでは、時間 t [秒] に得られた信号値 $x(t)$ の関数をフーリエ変換の対象として扱います。したがって、登場する全ての関数が1変数関数であることに注意し、以後の内容を読み進めて下さい。

定義 1 関数 $x(t)$ が

$$x(t + T) = x(t)$$

を満たすとき、関数 $x(t)$ は周期関数である。ただし、 T は周期関数 $x(t)$ の周期とする。

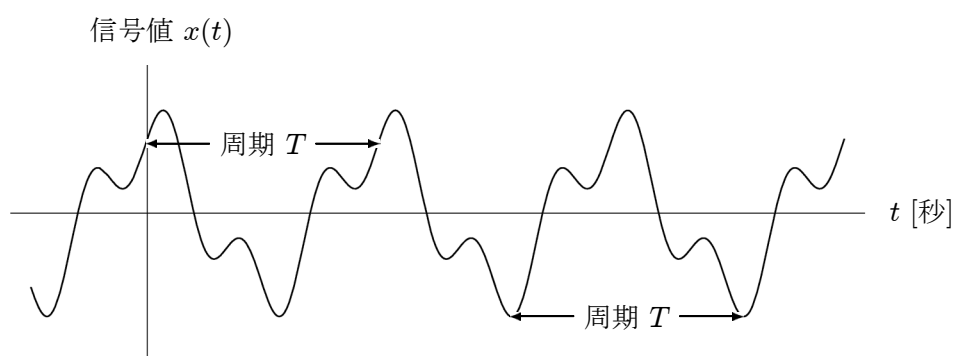


図 1.1: 周期関数の例

¹第3章では、周期関数にとどまらず、多くの一般的な関数についてフーリエ級数展開できることを述べます。

まず最初に、周期関数を扱うにあたって**周期**と**周波数**の重要な関係について述べておきます。**周波数**は、1秒間に含まれる同じ波形の波の個数で、記号 f [Hz] (または [回転/秒]) で表します²。いま、周期関数の周期³を記号 T [秒] で表せば、周波数 f [Hz] は周期 T [秒] の逆数

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}$$

によって得られます。逆に、周期 T [秒] は周波数 f [Hz] の逆数

$$T = \frac{1}{f} \text{ [秒]}$$

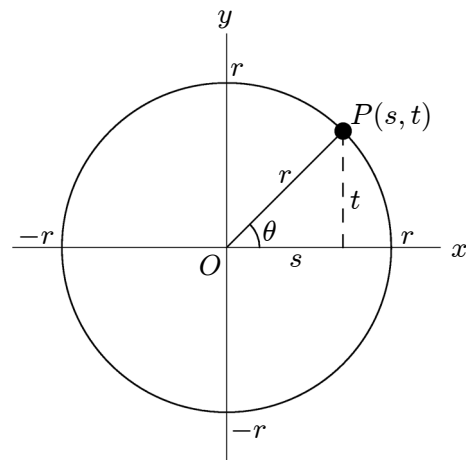
によって得られます。これらは、周期関数にとって最も重要な関係式なので覚えておきましょう。なお、このテキストでは、一貫して、記号 T [秒] は周波数を、記号 f [Hz] は周波数を、それぞれ表します。

私たちにとって最も身近な周期関数は、**三角関数**と呼ばれ、角 θ [rad] を変数とする⁴

- $\sin \theta$ (**sine**; **正弦**),
- $\cos \theta$ (**cosine**; **余弦**),
- $\tan \theta$ (**tangent**; **正接**)

の3つの関数です。周期は、 $\sin \theta$ および $\cos \theta$ がそれぞれ 2π [rad]、 $\tan \theta$ が π [rad] です。もちろん、これらの関数は、右下の図のように xy 平面上に点 $P(s, t)$ を与えたとき、

- $\sin \theta = \frac{t}{r} \quad \left(\theta = \arcsin \frac{t}{r} \right),$
- $\cos \theta = \frac{s}{r} \quad \left(\theta = \arccos \frac{s}{r} \right),$
- $\tan \theta = \frac{t}{s} \quad \left(\theta = \arctan \frac{t}{s} = \tan^{-1} \frac{t}{s} \right),$
- $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{s} \leftarrow \text{正割 (secant)},$
- $\csc \theta = \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{t} \leftarrow \text{余割 (cosecant)},$
- $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{s}{t} \leftarrow \text{余接 (cotangent)}$



によって定義されます⁵ (角 θ [rad] は、点 P の**偏角** (argument) とも呼ばれます)。また、定義より、三角関数の基本的な性質

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

²1968年、ドイツの物理学者 H. R. Hertz (ヘルツ) にちなんで、周波数を表す単位に「Hz (ヘルツ)」が正式採用されました。それ以前は「cycle (サイクル)」が使用されていました。

³周期は1周期 (1回転) あたりの時間を表すので、周期の正確な単位は [秒/回転] となります。

⁴三角関数の角の表記方法には、[rad] (ラジアン; **radian**) という単位で表す**弧度法**を用います。なお、高校で習う角の表記方法は、[°] (度) を単位とする**60分法**と呼ばれるものです。弧度法と60分法には π [rad] = 180 [°] なる相互関係があります。

⁵「arc」は「弧」という意味で、 $\arcsin \theta$ は $\sin \theta$ の弧の長さを指します。

も導かれます。補足として、三角関数のグラフを図 1.2 に、三角関数の代表的な値を表 1.1 に、それぞれ挙げておきます (復習を兼ねて、表 1.1 の空欄を埋めてみましょう)。

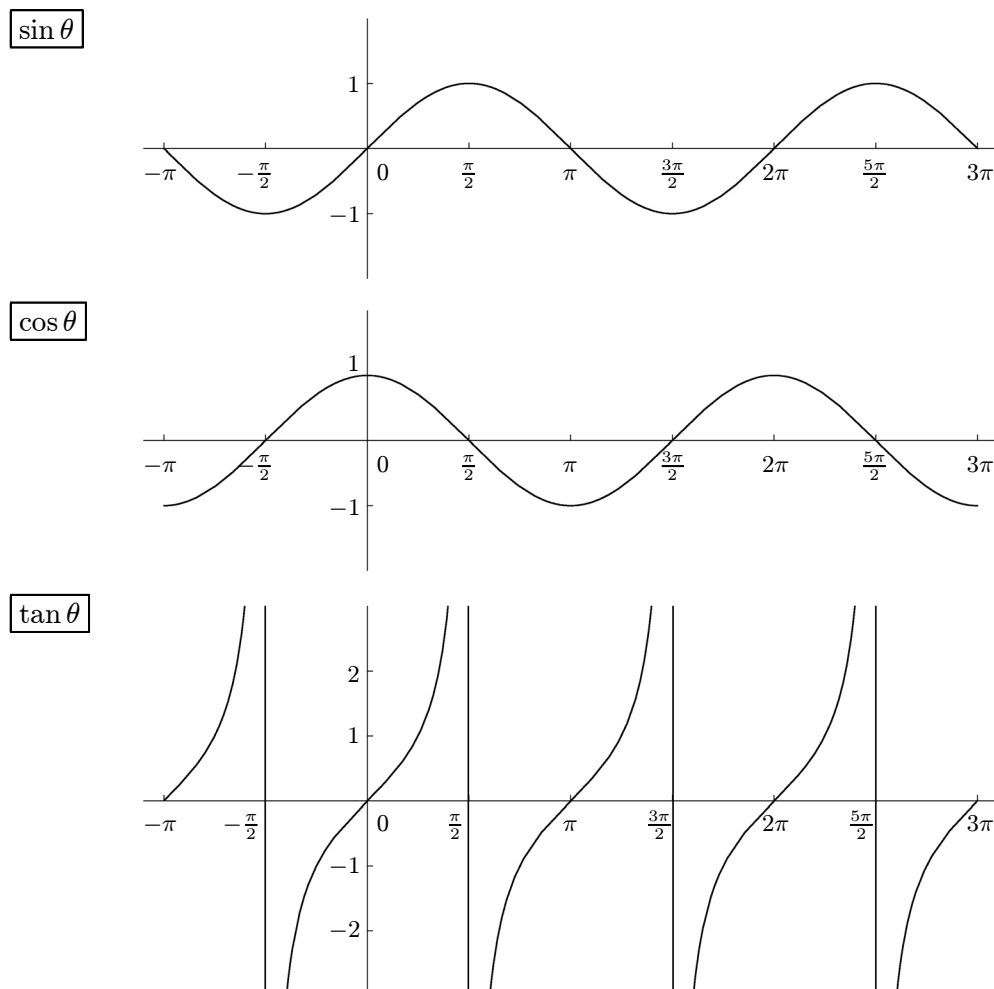


図 1.2: 三角関数のグラフ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	-1				0				1				0	-1	0
$\cos \theta$	0				1				0				-1	0	1
$\tan \theta$	$\pm\infty$				0				$\pm\infty$				0	$\pm\infty$	0

表 1.1: 三角関数の代表的な値

復習を兼ね、三角関数の性質について列挙しておきます。まず、三角関数は周期関数ですから、周期関数の定義より、関係式

$$\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi), \quad \cos \theta = \cos(\theta + 2\pi), \quad \tan \theta = \tan(\theta + \pi)$$

が成り立ちます。このことより、次の定理を得ます。

定理 1.1 n が整数のとき、三角関数について以下の関係が成り立つ。

(1) $\sin \theta = \sin(\theta + 2n\pi)$.

(2) $\cos \theta = \cos(\theta + 2n\pi)$.

(3) $\tan \theta = \tan(\theta + n\pi)$.

また、三角関数の性質から、次の定理が成り立ちます。

定理 1.2 三角関数について以下の関係が成り立つ。

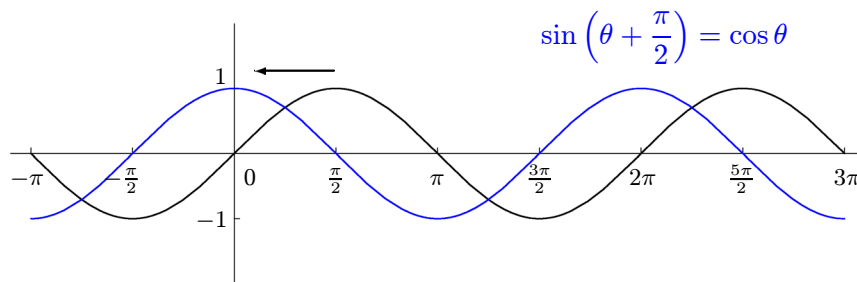
(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$.

(2) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta$.

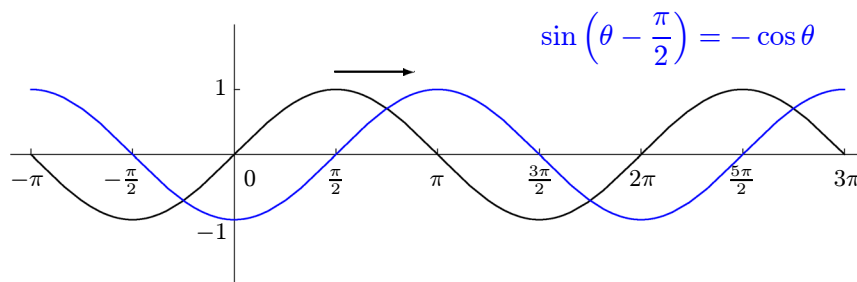
(3) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$.

(4) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta$.

定理 1.2 の (1) の $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ は、 $\sin \theta$ のグラフを横軸に $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ左に平行移動したもので、このグラフは $\cos \theta$ のグラフに一致します (下図)。



同様に、定理 1.2 の (2) の $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ は、 $\sin \theta$ のグラフを横軸に $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ右に平行移動したもので、このグラフは $-\cos \theta$ のグラフに一致します (下図)。



任意の角 α, β [rad] に対して、次の定理が成り立ちます。

定理 1.3 (加法定理) 三角関数について以下の関係が成り立つ。

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

さらに、定理 1.3 より、次の定理を得ます。

定理 1.4 三角関数について以下の関係が成り立つ。

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)).$$

$$(3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$(4) \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)).$$

その他にも、**半角の公式**、**倍角の公式**、**3倍角の公式**、…などが導かれます。また、定理 1.3 の加法定理を用いると、三角関数の合成を行なうことができます。 A, B を実数の定数とすれば、関数 $A \sin \alpha + B \cos \alpha$ は、

$$\begin{aligned} & A \sin \alpha + B \cos \alpha \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

と変形できるので、右図より

$$\cos \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

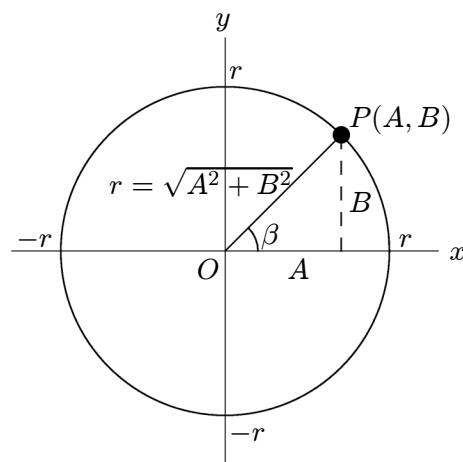
とおくと、あらためて

$$(\text{与式}) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha)$$

と書き表せます。右辺の $\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha$ は、定理 1.3 の (1) の右辺に一致することから、

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \beta)$$

という関係式が得られます。



この節の締めくくりとして、三角関数の対称性について見ておきましょう。

定義 2

- (1) 関数 $x(t)$ が $x(-t) = -x(t)$ を満たすとき、関数 $x(t)$ は**奇関数**であるという。
- (2) 関数 $x(t)$ が $x(-t) = x(t)$ を満たすとき、関数 $x(t)$ は**偶関数**であるという。

定義より、三角関数の対称性は以下のようになります。

- $\sin \theta$ は奇関数である ($\because \sin(-\theta) = -\sin \theta$)。
- $\cos \theta$ は偶関数である ($\because \cos(-\theta) = \cos \theta$)。
- $\tan \theta$ は奇関数である ($\because \tan(-\theta) = -\tan \theta$)。

なお、これまでに挙げた三角関数の性質や関係式が、これから学ぶフーリエ級数展開やフーリエ変換にとって、非常に重要であることを付け加えておきます。