## 1.2 波としての三角関数

最初にも述べたように、このテキストでは時間 $t$ [秒] における信号値 $x(t)$ の関数を扱います。したがって、周期関数の中で最も基本的な三角関数を、時間 $t$ [秒] における信号値 $x(t)$ の関数に書き換えましょう。すなわち、三角関数を物理的な波として捉え直しましょう[6]。結論から述べれば、三角関数 $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は、時間 $t$ [秒] を変数とする関数 (信号値)

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

に書き換えられます。なお、前者を **sin 波形**の関数、後者を **cos 波形**の関数といい、三角関数の関係 (定理 1.2) を用いて相互に書き換えることができます。

まず、$\phi = 0$ とした関数

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t)$$

について考察しましょう。三角関数の変数 $\theta$ [rad] は弧度法による表記でしたから、

$$\theta = \omega t \text{ [rad]}$$

の関係が成り立ちます。記号 $t$ [秒] の単位を考慮すれば、

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ [rad/秒]}$$

となります。これは、距離 ($\theta$) と時間 ($t$) と速度 ($\omega$) の関係に似ていて、$\omega$ は**角速度**と呼ばれます (通常、記号 $\omega$ が使用されます)。また、記号 $A$ は**振幅**と呼び、sin 波形および cos 波形の**波の大きさ** (振動する幅) を決めます。すなわち、関数

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t)$$

は、半径 $A$ の円周上を角速度 $\omega$ [rad] で回転する点を観測したものといえます (図 1.3)。

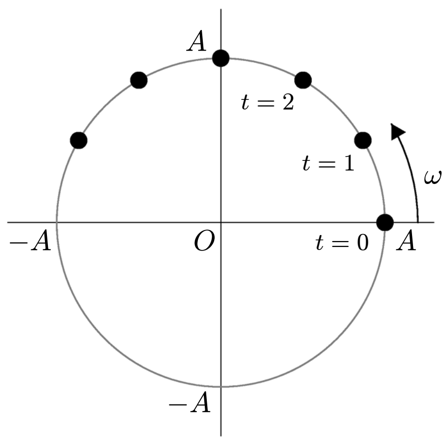



図 1.3: 円周上を点が回転している様子

[6]例えば、岸壁に打ち寄せる波の高低を観測している様子を想像してください。

より詳しく述べれば、$x(t) = A\sin(\omega t)$ のグラフは回転する点を縦軸に射影したもの (位置) を時系列に並べたもので、$x(t) = A\cos(\omega t)$ のグラフは回転する点を横軸に射影したもの (位置) を時系列に並べたものです (図 1.4)。

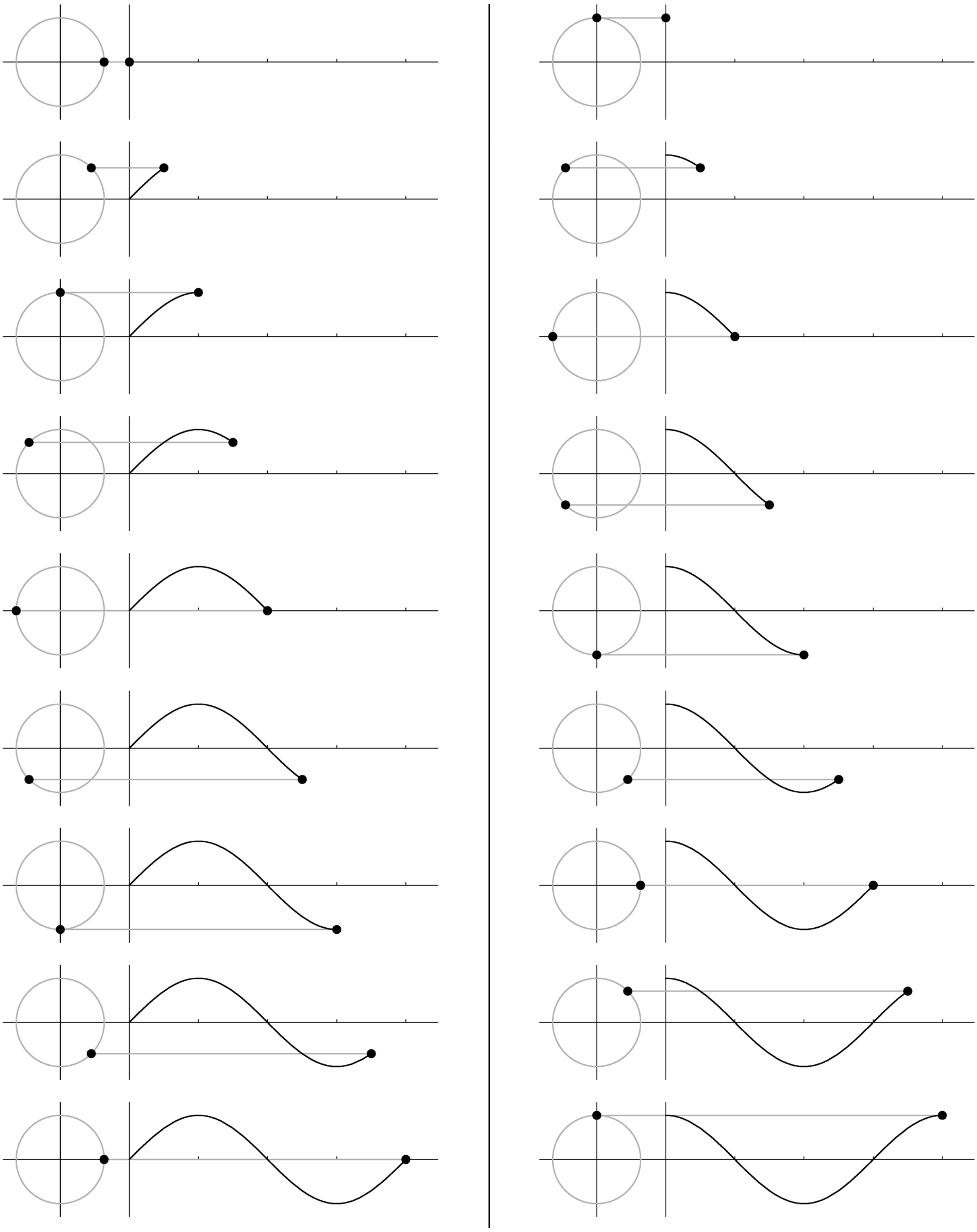
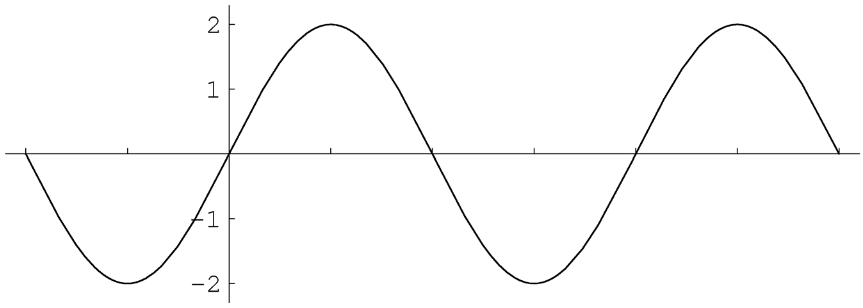


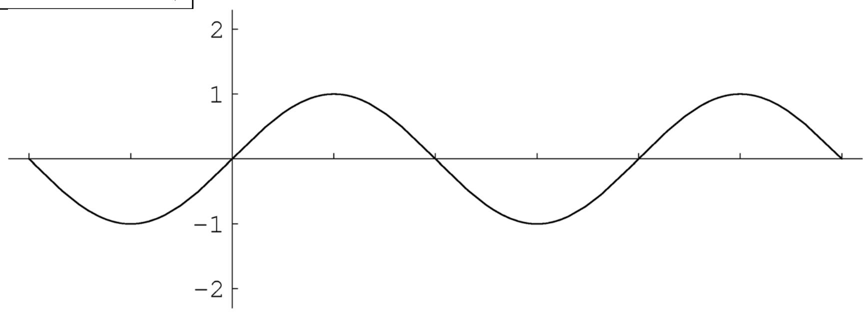
図 1.4: 回転する点と信号値 $x(t)$ の関係

振幅 $A$ の違いによる sin 波形の関数を比較しておきましょう (図 1.5)。

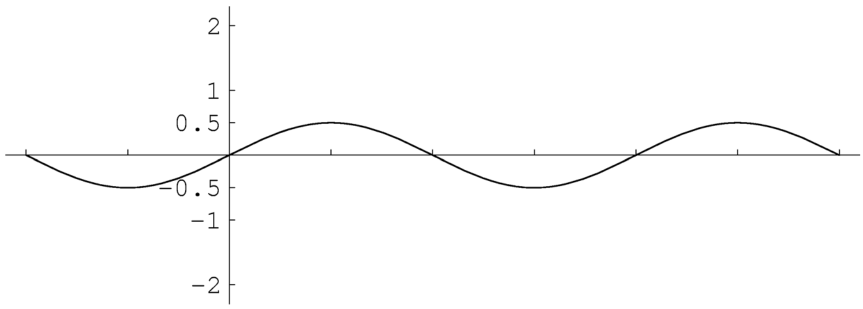
$\boxed{A = 2 \text{ の場合}}$




$\boxed{A = 1 \text{ の場合 (基準となる振幅)}}$




$\boxed{A = 0.5 \text{ の場合}}$




$\boxed{A = -1\ (< 0) \text{ の場合}}$

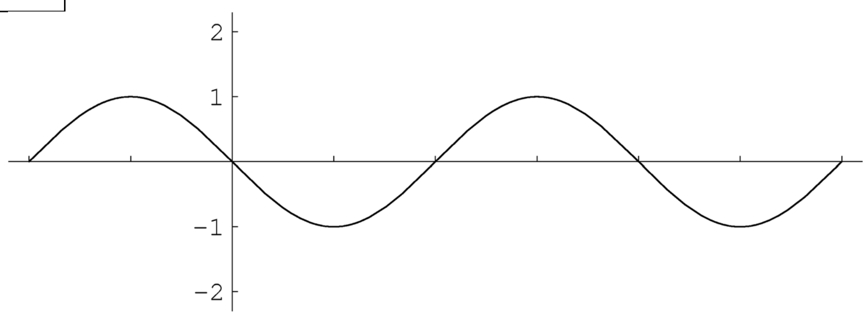
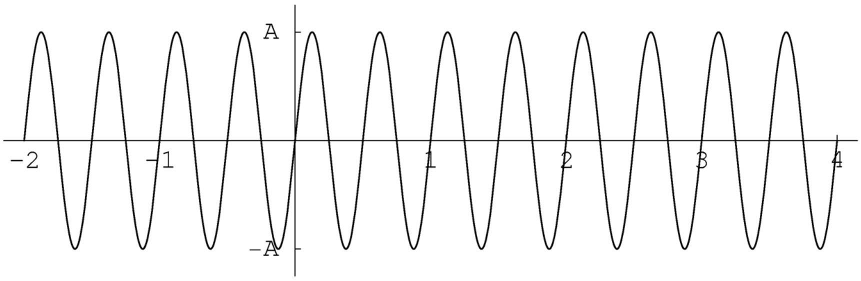


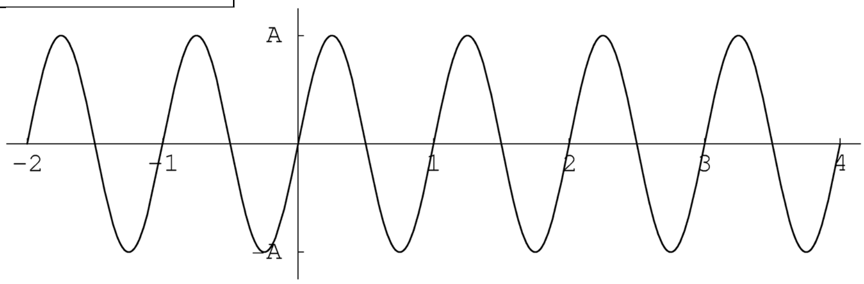

図 1.5: 振幅の違いによる波形の比較

角速度 $\omega$ [rad/秒] の違いによる sin 波形の関数を比較しておきましょう (図 1.6)。

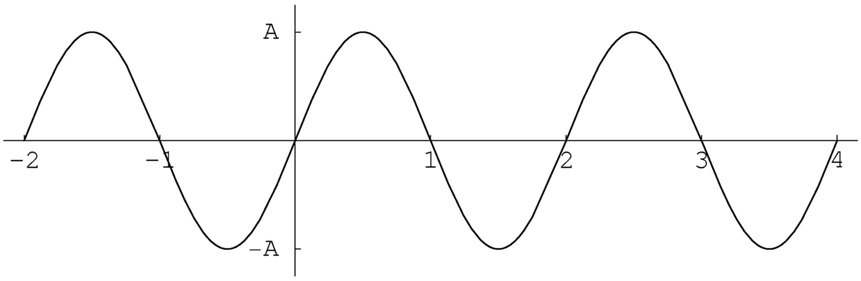
$\boxed{\omega = 4\pi \text{ の場合}}$




$\boxed{\omega = 2\pi \text{ の場合 (基準となる角速度)}}$




$\boxed{\omega = \pi \text{ の場合}}$




$\boxed{\omega = -2\pi\ (< 0) \text{ の場合}}$

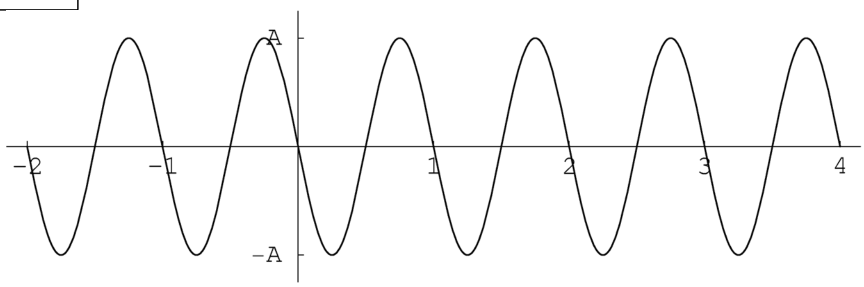



図 1.6: 角速度の違いによる波形の比較

ここで注意していただきたいのは、sin 波形や cos 波形の関数に対して、時間 $t$ [秒] に $0, 1, 2, \cdots$ のような整数値 (〜有理数) を与えたとき、その信号値 $x(t)$ が三角関数の代表値 (表 1.1) で得られた方が関数を扱い易くなります。そこで、三角関数を波として捉える場合は、図 1.6 のように角速度 $\omega$ [rad/秒] に $\pi$ を含む数値を選ぶことが普通です (数学的には全く問題ありません)。

また、図 1.6 のグラフから次の関係が得られます。例えば、角速度 $\omega = 4\pi$ [rad/秒] の場合、1 秒間に 2 つの波を含むことから周期 $T = 0.5$ [秒] と周波数 $f = 2$ [Hz] が読み取れます。さらに、角が1 [Hz] **あたり** $2\pi$ [rad] **進む**ことに注意すれば、1 秒間に進んだ角は、関係

$$\begin{aligned} &4\pi \text{ [rad/秒]} \times 1 \text{ [秒]} = 2\pi \text{ [rad/Hz]} \times 2 \text{ [Hz]} \\ \Longleftrightarrow\ &\omega \text{ [rad/秒]} \times 1 \text{ [秒]} = 2\pi \text{ [rad/Hz]} \times f \text{ [Hz]} \end{aligned}$$

を満たします。したがって、関係

$$\omega = 2\pi f$$

が得られます。周期 $T$ [秒] と周波数 $f$ [Hz] の関係 $f = \dfrac{1}{T}$ を用いれば、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

という関係も得られます (1 周期 (回転) に進む角 $2\pi$ [rad] を、掛かった時間 (周期) $T$ [秒] で割れば、角速度 $\omega$ [rad/秒] が求められます)。これらの関係から関数を

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(2\pi f t), \quad & x(t) &= A\cos(2\pi f t), \\ x(t) &= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad & x(t) &= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

と表すことも度々あります。上記の 2 つの関係

$$\omega = 2\pi f \qquad \text{と} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

は、非常に重要なので理解して (覚えて) おきましょう。

　さて、関数

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t)$$

については理解できたので、最終的な関数

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

について考察して行きましょう。理解しやすいように、ここでは sin 波形の関数にしぼって話を進めます (cos 波形の関数についても同様の考察を行なうことができます)。関数を数学的に見れば

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\sin\left(\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)$$

と変形できますから、$t' = t + \dfrac{\phi}{\omega}$ とおけば、

$$x\left(t' - \frac{\phi}{\omega}\right) = A\sin(\omega t')$$

と書き換えられます。したがって、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ を左右 (横軸方向) に平行移動した関数として捉えることができます。このような $\phi$ を、波の世界では**初期位相**と呼びます。単位は [rad] です。なお、$\dfrac{\phi \text{ [rad]}}{\omega \text{ [rad/秒]}}$ の単位が [秒] となることにも注意しておきましょう。

それでは、具体的に関数のグラフを描くことで、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ について理解を深めましょう。振幅 $A = 1$, 角速度 $\omega = 2\pi$ [rad/秒] として、初期位相 $\phi = \frac{\pi}{4}$ [rad] と初期位相 $\phi = -\frac{\pi}{4}$ [rad] のグラフをそれぞれ描くと図 1.7 のようになり、関数 $x(t) = \sin(2\pi t)$ のグラフをそれぞれ、左に 0.125 [秒]、右に 0.125 [秒]、平行移動したグラフとなります ($|\phi|/\omega = 0.125$ [秒])。

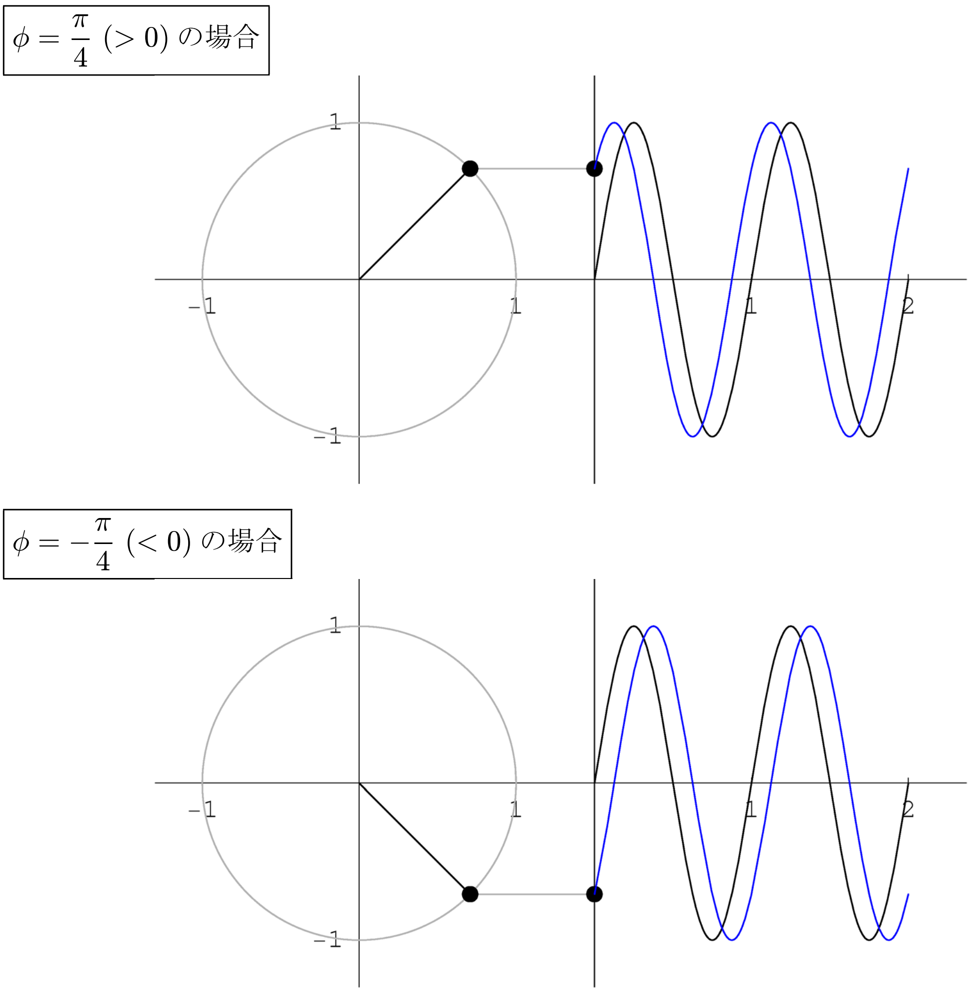



図 1.7: 初期位相の違いによる波形の比較

波の世界では、$\phi > 0$ のとき、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は、

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の位相を $|\phi|$ [rad] 進めた波形である**」または

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の時間を $|\phi|/\omega$ [秒] 進めた波形である**」

といいます。逆に、$\phi < 0$ のとき、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は、

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の位相を $|\phi|$ [rad] 遅らせた波形である**」または

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の時間を $|\phi|/\omega$ [秒] 遅らせた波形である**」

といいます。なお、グラフが時間 $t$ [秒] を変数とする関数であることに注意しましょう[7]。位相を考えるときは、円周上を回転する点を思い浮かべるとよいでしょう。

[7] グラフだけ見てしまうと波が遅れている (または進んでいる) ように感じられますが、それは逆です。