1.3　直交座標表示と極座標表示

平面と**複素平面**[8]を自然に対応させると、平面上の任意の点 $P(x, y)$ の座標は、複素平面上の座標

$$z = x + iy$$

に対応します (図 1.8 参照)。ただし、i は**虚数単位**を表します[9]。なお、このような表示方法を**直交座標表示**と呼びます。ここで、座標 z の**実部** (Real part) x と**虚部** (Imaginary part) y を

$$x = \mathrm{Re}\, z \qquad \text{と} \qquad y = \mathrm{Im}\, z$$

で表し、(複素数としての) 座標 $z = x + iy$ の共役複素数を

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

で表せば、原点 O から点 $P(z)$ までの距離 $|z|$ は

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{\overline{z}\,z} \quad \left(= \sqrt{x^2 + y^2} = r\right)$$

によって得られ、実部 x と虚部 y は

$$x = \mathrm{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{と} \qquad y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

よって得られます。

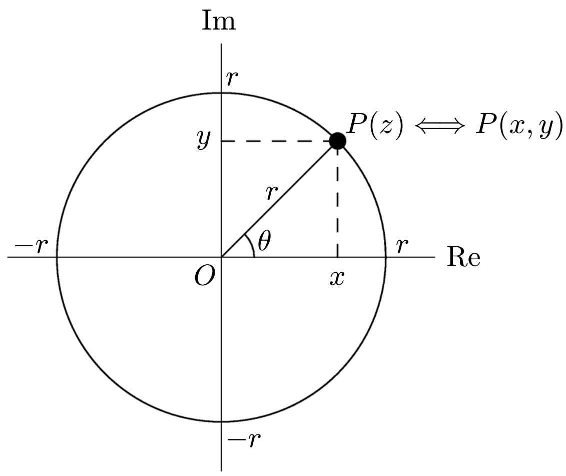

図 1.8: 直交座標表示と極座標表示

[8] **ガウス (gauss) 平面**とも呼ばれます。
[9] フーリエ変換を取り扱った工学書では、i は総計 (合計) などの変数として使われるため、j が虚数単位に使用されます。

さらに、図 1.8 のように原点 O を中心として点 $P(z)$ を通る半径 $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ の円を描けば、点 $P(z)$ の座標は

$$\begin{aligned} z = x + iy &= (r\cos\theta) + i(r\sin\theta) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

と書き直すことができます。ただし、θ [rad] は実軸 (横軸) と直線 OP の成す角 (**偏角** (argument)) とします。このような表示方法を (三角関数による) **極座標表示**と呼びます。また、上記の式の θ を $-\theta$ で置き換えたものは、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$ となります。なぜなら、三角関数の対称性によって、

$$\begin{aligned} \overline{z} = x - iy &= (r\cos\theta) - i(r\sin\theta) \\ &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= r((\cos\theta) + i(-\sin\theta)) \\ &= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \end{aligned}$$

となるからです (図 1.8 からも容易に読み取れます)。さらに、$z \cdot \overline{z}$ を計算すると、関係

$$z \cdot \overline{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta - i\sin\theta) = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

$$\iff \quad (\cos\theta + i\sin\theta) \cdot (\cos\theta - i\sin\theta) = 1$$

が得られます。もちろん、実部 x と虚部 y は

$$x = \mathrm{Re}\, z = r\cos\theta \qquad と \qquad y = \mathrm{Im}\, z = r\sin\theta$$

となります。

さて、微積分で学んだ関数 $f(x)$ の**テイラー (Taylor) 展開**は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x-a)^k + \cdots \end{aligned}$$

でしたから、$a = 0$ として、指数関数[10] (exponential) e^x, 正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$ のテイラー展開を求めると

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5 + \dfrac{1}{6!}x^6 + \dfrac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\ \sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\ \cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots \end{cases}$$

[10] **自然対数の底** $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\cdots$ の指数関数 e^x は、$\exp x$ とも記述されます。また、e は**ネピアの数**とも呼ばれます。

となります。ここで、テイラー展開された指数関数 e^x に対して、両辺の x を ix で置き換えると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - i\frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

という関係式が得られます。これが、有名な**オイラー (Euler) の公式**「$e^{ix} = \cos x + i \sin x$」です。したがって、極座標表示された点 $P(z)$ の座標 $z = x + iy$ は、オイラーの公式を用いて

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

と書き表されます。また、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$ は θ を $-\theta$ で置き換えたものでしたから、複素数 $z = x + iy = e^{i\theta}$ の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$ は

$$\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{i(-\theta)} = re^{-i\theta}$$

と書き表されます。したがって、実部 x と虚部 y は

$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, \left(re^{i\theta}\right) = r\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ y = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, \left(re^{i\theta}\right) = r\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

となります。以上より、三角関数と指数関数の重要な関係

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

が得られます。なお、極座標表示において、前者

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

のような表示方法を「**三角関数による極座標表示**」と呼び、後者

$$z = re^{i\theta}$$

のような表示方法を「**指数関数による極座標表示**」と呼ぶことにします。

その他にも、極座標表示では次のことが成り立ちます。まず、三角関数による極座標表示で iz を計算すると、

$$
\begin{aligned}
iz &= ir(\cos\theta + i\sin\theta) = r(i\cos\theta + i^2\sin\theta)\\
&= r(i\cos\theta - \sin\theta) = r(-\sin\theta + i\cos\theta)\\
&= r\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad (\because \text{定理 } 1.2)
\end{aligned}
$$

となり、iz は点 $P(z)$ から位相が $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] 進んだ点の座標であることがわかります。同様に、$-iz$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
-iz &= -ir(\cos\theta + i\sin\theta) = r(-i\cos\theta + (-i^2)\sin\theta)\\
&= r(i(-\cos\theta) + \sin\theta) = r(\sin\theta + i(-\cos\theta))\\
&= r\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad (\because \text{定理 } 1.2)
\end{aligned}
$$

となり、$-iz$ は点 $P(z)$ から位相が $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] 遅れた点の座標であることがわかります。すなわち、i を掛けることで位相が $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] 進み、$-i$ を掛けることで位相が $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] 遅れます。このことは、指数関数による極座標表示についても同じことが言えるので、

$$
iz = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(re^{i\theta}\right) \qquad \text{と} \qquad -iz = re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(re^{i\theta}\right)
$$

が成り立ち、関係式

$$
i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \text{と} \qquad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}
$$

が得られます。これは、単位円周上 $(r=1)$ の座標 $1+i0=1$ $(\theta = 0$ [rad]$)$ に対して、位相を $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] 進ませた座標が $0+i1=i$ で、位相を $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせた座標が $0-i1=-i$ であることを意味しています。したがって、実部 x と虚部 y は

$$
\begin{cases}
x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\left(re^{i\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(i\, re^{i\theta}\right), \\[2ex]
y = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\left(re^{i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(-i\, re^{i\theta}\right)
\end{cases}
$$

と表すことができます。すなわち、波の世界に戻れば、cos 波形の関数 $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ と sin 波形の関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は円周上を回る点の実軸 (横軸) と虚軸 (縦軸) への射影でしたから、指数関数による極座標表示 $re^{i\theta}$ を用いて

$$
\begin{cases}
x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left(Ae^{i(\omega t+\phi)}\right) = \mathrm{Im}\left(iAe^{i(\omega t+\phi)}\right), \\[2ex]
x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = \mathrm{Im}\left(Ae^{i(\omega t+\phi)}\right) = \mathrm{Re}\left(-iAe^{i(\omega t+\phi)}\right)
\end{cases}
$$

と表されます。ただし、r は A で、θ は $\omega t + \phi$ で、それぞれ置き換えてあります。

以後、**円周上を回る点の実軸 (横軸) への射影を信号値 $x(t)$ とし**、指数関数による極座標表示を用いた cos 波形の関数は、単に

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$$

と記述し、sin 波形の関数は

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = -iAe^{i(\omega t + \phi)}$$

と記述します[11]。言い換えれば、sin 波形の関数は、cos 波形の関数の位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れた関数として扱います。

それでは、実際に直交座標表示・三角関数による極座標表示・指数関数による極座標表示の相互変換と四則演算を行なってみましょう。これは、第 4 章で学ぶ高速フーリエ変換[12]の計算を行う上で重要となります (これを知らないと、計算が大変です)。例として、複素平面上の 2 点

$$P(2,2) \quad (= P(x_1, y_1)) \qquad と \qquad Q(-1,\sqrt{3}) \quad (= Q(x_2, y_2))$$

について相互変換と四則演算を行ないます (図 1.9 参照)。

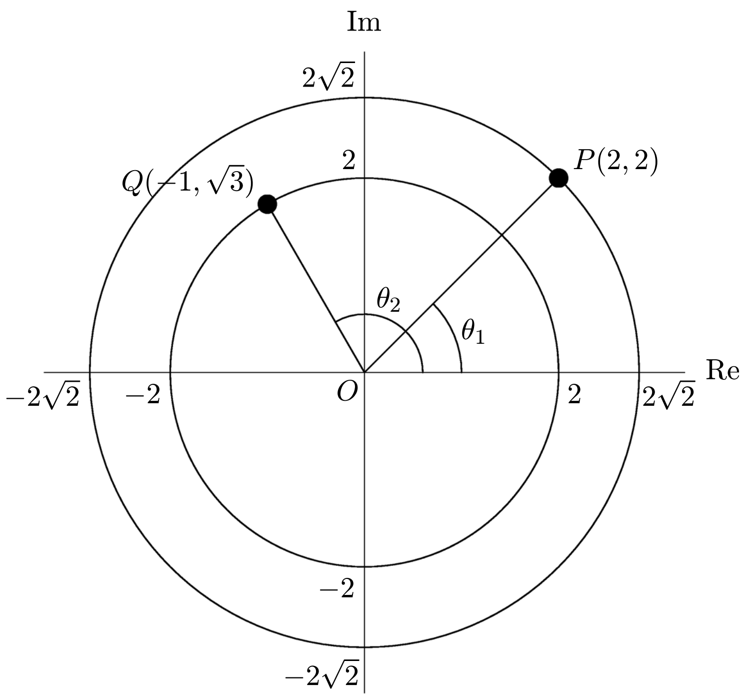

図 1.9: 直交座標表示と極座標表示の相互変換

[11]フーリエ変換を扱った他の書籍でも標準的に用いられている表記方法なので、この表記方法に慣れてください。

[12]離散フーリエ変換とも呼ばれ、離散的な数値列を波と解釈してフーリエ変換を行ないます。そのため、コンピュータ上でフーリエ変換を計算させることに適した方法です。

まず、点 P と点 Q を直交座標表示すると

$$2+i2 \quad (=z_1) \qquad \text{と} \qquad -1+i\sqrt{3} \quad (=z_2)$$

と表されます (虚部であることを明示するために i を先に書きます)。また、図 1.9 のように原点 O を中心として点 P を通る円を描けば、半径 $r_1=|z_1|$ は $\sqrt{(2+i2)(2-i2)}=2\sqrt{2}$ $(=r_1)$ となり、偏角 θ_1 は $\arg(2+i2)=\arctan\dfrac{2}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ $(=\theta_1)$ となります。よって、点 P の三角関数による極座標表示は

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \left(=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+i2\right)$$

となります。同様に、図 1.9 のように原点 O を中心として点 Q を通る円を描けば、半径 $r_2=|z_2|$ は $\sqrt{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}=2$ $(=r_2)$ となり、偏角 θ_2 は $\arg(-1+i\sqrt{3})=\pi+\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=\dfrac{2\pi}{3}$ $(=\theta_2)$ となります。よって、点 Q の三角関数による極座標表示は

$$z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad \left(=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}\right)$$

となります。さらに、点 P と点 Q について指数関数による極座標表示を行なえば

$$z_1=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{と} \qquad z_2=2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

となります。

【注意】本テキストでは、複素平面上の座標 $z=x+iy$ で表される点 $P(z)$ の偏角 (argument) θ [rad] を求めるにあたって、主に工学系の書籍で用いられる

$$\theta=\arg z \qquad (-\pi<\theta\leq\pi)$$

を使用します。なぜなら、普通の数学書では、逆正接関数 arctan は、平面上の任意の点 $P(x,y)$ $(x\neq 0)$ に対して $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ を満たす角 θ [rad] $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を返す関数として定義されているためです。この定義だと点 $P(x,y)$ が第 2 象限と第 3 象限にある場合には正しい角を得ることができませんし、$x=0$ となるような点 $P(0,y)$ では角を得ることさえできません。これに対して、$\arg z$ によって得られる角 θ [rad] は、第 2 象限にある場合は $\theta=\pi+\arctan\dfrac{y}{x}$ を返し、第 3 象限にある場合は $\theta=-\pi+\arctan\dfrac{y}{x}$ を返します。また、$x=0$ のときには、$y>0$ であれば $\dfrac{\pi}{2}$ を返し、$y<0$ であれば $-\dfrac{\pi}{2}$ を返します。なお、数式処理ソフト Mathematica の関数 `ArcTan[x,y]` は、点がどの象限にあるかを考慮して値を返すので、関数 `Arg[z]` と同じ値を返します。

四則演算の加法と減法については、直交座標表示を用いると容易に計算することができます。

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\
&= (2 + i2) + (-1 + i\sqrt{3}) = 2 - 1 + i(2 + \sqrt{3}) = 1 + i(2 + \sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \\
&= (2 + i2) - (-1 + i\sqrt{3}) = 2 + 1 + i(2 - \sqrt{3}) = 3 + i(2 - \sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

あとは、必要に応じて極座標表示を行ないます (極座標表示で計算するのは大変です)。

$$
\text{参考}: \arg(1 + i(2 + \sqrt{3})) = \frac{5\pi}{12}, \quad \arg(3 - i(2 - \sqrt{3})) = \arctan\frac{2 - \sqrt{3}}{3} \fallingdotseq 0.08908.
$$

また、残りの乗法と除法については、極座標表示を用いると容易に計算することができます。三角関数による極座標表示を用いた乗法と除法の計算は以下のようになります。

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 \cdot r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \\
&= \left(2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2\sqrt{2} \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
&= \left(2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) / \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos -\frac{5\pi}{12} + i\sin -\frac{5\pi}{12}\right).
\end{aligned}
$$

指数関数による極座標表示を用いた乗法と除法は、もっと直接的に計算することができ、以下のようになります。

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \left(2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \left(2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \Big/ \left(2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \sqrt{2}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}}. \end{aligned}$$

ちなみに、直交座標表示で計算すると以下のようになります。

$$z_1 \cdot z_2 = (2+i2)(-1+i\sqrt{3}) = -2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3}).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i2}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

もちろん、これらの点を極座標表示すると上記のようになります。

$$\text{参考}: \arg(-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})) = \frac{11\pi}{12}, \quad \arg\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\pi}{12}.$$