

第2章 フーリエ級数

2.1 直交関数系とフーリエ級数

平面上の2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ に対して、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると、その内積 $(\vec{a}, \vec{b})$ は、

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

と定義されています。また、

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \cos \theta = 0 \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

を満たすとき、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**直交する**といえます。この概念を関数に対応させて、次の定義を与えましょう。

定義 3 閉区間 $[a, b]$ で定義される積分可能な2つの連続関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、内積を

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

で定義する。また、 $(f(x), g(x)) = 0$ を満たすとき、関数 $f(x)$ と $g(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で**直交する**という。

さらに、 $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ を満たすベクトルの組 $\vec{a}$, $\vec{b}$ は2次元ベクトル空間 (平面) の**直交基底**と呼ばれ、加えて、 $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ (ノルムが1) を満たすとき**正規直交基底**と呼ばれました。内積の場合と同様に、この概念を関数に対応させて、次の定義を与えましょう。

定義 4 閉区間 $[a, b]$ で連続で積分可能な関数 $\varphi_n(x)$ からなる関数列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ に対して、異なる2つの関数 $\varphi_m(x), \varphi_n(x)$ ($m \neq n$) が区間 $[a, b]$ 上で直交しているとき、すなわち、

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots; m \neq n)$$

を満たし、さらに、

$$(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすとき、関数列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ を区間 $[a, b]$ 上の**直交関数系**という。さらに、この直交関数系が

$$(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすとき (各関数のノルム $\|\varphi_n(x)\|$ が1のとき)、関数列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ を区間 $[a, b]$ 上の**正規直交関数系**という。ただし、関数 $\varphi_n(x)$ のノルム $\|\varphi_n(x)\|$ は、

$$\|\varphi_n(x)\| = (\varphi_n(x), \varphi_n(x))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義する。

定義4を満たす直交関数系として次の定理が得られます。

定理 2.1 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

は直交関数系である。

証明 $\cos 0 \cdot x = 1$ に注意すれば、 $m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx \quad (\because \text{定理 1.4}) \\ &= 0. \quad (\because \sin \text{関数は奇関数であるから}) \end{aligned}$$

$m \neq n$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx \quad (\because \text{定理 1.4}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} (\sin(m+n)x) + \frac{1}{m-n} (\sin(m-n)x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx \quad (\because \text{定理 1.4}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} (-\sin(m+n)x) + \frac{1}{m-n} (\sin(m-n)x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$m = n$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx \quad (\because 2 \text{ 倍角の公式より}) \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2n} (\sin 2nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx \quad (\because 2 \text{ 倍角の公式より}) \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n} (\sin 2nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx &= \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx &= [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

以上より、関数列 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上の直交関数系である。 ■

系 2.2 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

は正規直交関数系である。

証明 定理 2.1 の証明より、各ノルムは

$$\|1\| = (1, 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi},$$

$$\|\cos nx\| = (\cos nx, \cos nx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\|\sin nx\| = (\sin nx, \sin nx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。したがって、各関数を各ノルムで割ることにより正規直交関数系を得る。 ■

もちろん、直交関数系はベクトル空間の(直交)基底の類似として定義したものですから、級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は、1次独立となります¹(ただし、区間 $[-\pi, \pi]$ で収束し、項別積分可能とする)。なぜなら、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cdot 1 \, dx &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cdot \cos kx \, dx &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cdot \sin kx \, dx &= 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

となり、1次独立であることが示されます。これは、級数展開の一意性を示していて、次に学ぶフーリエ級数が一意にフーリエ級数展開されることを示唆しています。

さて、ある関数 $f(x)$ が級数

$$f(x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表されている(近似されている)としましょう。このとき、関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能かつ、この級数が項別積分可能であるとすると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right) \\ &= \pi a_0 \end{aligned}$$

となります。次に、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right) \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx \\ &= \pi a_k \end{aligned}$$

¹級数 $f(x)$ の定数項が $\frac{a_0}{2}$ となっているのは、関数 1 のノルムが $\sqrt{2\pi}$ であるのに対して他の関数のノルムが $\sqrt{\pi}$ であることを考慮してあります。このように置くことで、フーリエ級数展開したときにフーリエ係数を効率よく表現することができます。

となります。同様に、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right) \\ &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx \\ &= \pi b_k\end{aligned}$$

となります。以上をまとめると次の定理が得られます。

定理 2.3 関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能かつ、級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

が項別積分可能であるとき、その係数は

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

によって与えられる。

この結果は、数学の大切な考え方の1つで、自分自身の一部を自分自身を用いて表していることから**再生核の原理**と言われています。なお、ここで求めた係数 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ を**フーリエ係数** (Fourier coefficients) と呼び、この係数を持つ級数を**フーリエ級数** (Fourier series) と呼びます。

【注意】 $\cos 0x = 1$ であることに注意すると、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 0x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

となります。また、ノルムを考慮して定数項を $\frac{a_0}{2}$ とすることで、係数が統一された形式で表現されます。ただし、 b_0 に相当する係数

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 0x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 0 \, dx = 0$$

は明らかに0となるので表記しないのが普通です。

一般には、区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能な周期関数 $f(x)$ ($f(x+2\pi) = f(x)$) が与えられたとき、この関数 $f(x)$ から、フーリエ係数

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を求め、フーリエ級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を求めます。この作業を**フーリエ級数展開** (Fourier transform) と呼びます。また、フーリエ級数展開されたフーリエ級数は元の関数 $f(x)$ と全く等しいかどうかわかりません。そこで、一般的には、記号「 $\sim$ 」を用いて

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と表します。

ここで、フーリエ級数展開において、関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能よりも強い条件である「**区分的に連続な関数**」という条件を導入しましょう。

定義 5 関数 $f(x)$ を有限区間 $[a, b]$ で定義されている関数とする。さらに、関数 $f(x)$ は有限個の点 $a_1, a_2, \dots, a_m$ を除いて連続で、各点 a_k において左側極限

$$f(a_k + 0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(a_k + h) \neq \pm\infty \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

と右側極限

$$f(a_k - 0) = \lim_{h \rightarrow -0} f(a_k + h) \neq \pm\infty \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

が存在するとしよう。このとき、 $a_1 = a$ において右側極限が存在し、 $a_m = b$ において左側極限が存在するならば、関数 $f(x)$ は有限区間 $[a, b]$ で**区分的に連続である**という。

もちろん、関数 $f(x)$ が有限区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続であれば、その区間で積分可能となります。さらに、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ も区分的に連続 (関数 $f(x)$ が**区分的になめらか**) であれば、関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

- $f(x)$ が連続な点 x で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ が不連続な点 x で $\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$ に収束し

ます²。以後、このテキストで扱うフーリエ級数展開の対象となる関数 $f(x)$ は、 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が**区分的に連続である**とします。すなわち、関数 $f(x)$ のフーリエ級数が $f(x)$ に収束する (近似される) ような関数を対象とします。

²関数が連続であれば、そのフーリエ級数は元の関数に完全に一致しますが、不連続な点を含む関数のフーリエ級数は、不連続な点の周りで近似されるため元の関数には完全に一致しません (フーリエ級数は三角関数達の総和なので連続関数になる)。これは、関数の厳密性より、関数がフーリエ級数として表せる利便性を重要視しています。詳細については、「フーリエ級数の収束」で改めて述べることにします。

2.2 複素フーリエ級数

第 1.3 節で学習したように、三角関数は指数関数で表現することができましたから、前節の三角関数で表現されたフーリエ級数を指数関数で表現されたフーリエ級数に書き換えてみましょう。

三角関数と指数関数には、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{および} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

の関係が成り立ちましたから、 θ を nx で置き換えれば、

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{および} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

と書き換えられます。これらの関係式を関数 $f(x)$ のフーリエ級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に代入すると

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx})$$

となります。ここで、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (c_{-n} = \overline{c_n})$$

とおくと、改めて

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

と書き直すことができます。このような級数を得る作業を**複素フーリエ級数展開**と呼び、得られた級数を**複素フーリエ級数**と呼びます。なお、三角関数で表現されたフーリエ係数

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

より、指数関数で表現されたフーリエ係数

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

が得られます ($k = 0, -1, -2, \dots$ の場合のフーリエ係数も上式で良いことが容易に確かめられます)。これを**複素フーリエ係数**と呼びます。以上をまとめると、次の定理を得ます。

定理 2.4 関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能かつ、級数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

が項別積分可能であるとき、その係数は

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

によって与えられる。

複素フーリエ級数の直交関数系は、閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上において、

$$\dots, e^{i(-n)x}, \dots, e^{i(-2)x}, e^{i(-1)x}, 1, e^{ix}, e^{i2x}, \dots, e^{inx}, \dots$$

$$\Longleftrightarrow \varphi_n(x) = e^{inx} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となります。また、この複素関数列の内積は、後の方の関数に共役をとって、

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx$$

のように定義します。このとき、 $m \neq n$ ならば、内積は

$$\begin{aligned} (\varphi_m(x), \varphi_n(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \left[\frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、関数が直交していることがわかります。 $m = n$ ならば、内積は

$$\begin{aligned} (\varphi_n(x), \varphi_n(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)x} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となり、各関数 $\varphi_n(x)$ のノルムが

$$\|\varphi_n(x)\| = (\varphi_n(x), \varphi_n(x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

であることもわかります。

さらに、複素フーリエ級数で注意しなければならないことは、複素フーリエ級数の部分和は、

$$\begin{aligned} S_k(x) &= c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + (c_2 e^{i2x} + c_{-2} e^{-i2x}) + \cdots + (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \\ &= \sum_{n=-k}^k c_n e^{inx} \end{aligned}$$

のように**対称和**に取る必要があります³。なぜなら、三角関数によるフーリエ級数と比較すると、三角関数によるフーリエ級数の第 n 項を指数関数で表現するには e^{inx} と e^{-inx} が必要になるからです。

そもそも三角関数によるフーリエ級数と指数関数によるフーリエ級数 (複素フーリエ級数) は同一のもので、その表現が異なっているにすぎません。指数関数によるフーリエ級数は、直交関数系 (直交基底) が複素関数であるためその係数も複素数になりますが、 $c_n e^{inx}$ と $c_{-n} e^{-inx}$ の和は結局実数となって、元の三角関数によるフーリエ級数に一致します。どちらの表現が便利であるか簡単に言い切ることはできませんが、実際問題では実関数の範囲で処理できる三角関数によるフーリエ変換が比較的便利で、理論的な研究には表現が簡単で計算が容易な指数関数によるフーリエ級数が便利なようです。いずれにしろ、双方の表現に慣れておく必要があります。

	三角関数によるフーリエ級数	指数関数によるフーリエ級数
級数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$
係数	$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$	$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx,$ $c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} \, dx$

$$* \text{ 関係 } c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \left(c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \right) \text{ が成り立つ。}$$

表 2.1: 三角関数によるフーリエ級数と指数関数によるフーリエ級数の比較

³前にも述べたように、三角関数は、指数関数によって極座標表示されたベクトル $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ の合成和として得られたベクトルと一致します。したがって、複素フーリエ級数は、上記のような対称性を持ちます。この対称性は、以後のフーリエ変換や離散的なフーリエ変換でも姿を見せるので、意識しながら付き合う必要があります。