2.3　フーリエ級数展開

これまで、関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開に関して、関数の定義区間やフーリエ級数の積分区間を断りなく $[-\pi, \pi]$ に取ってきました。これは、フーリエ級数を構成する三角関数が基本周期 2π を持つためです。すなわち、フーリエ級数の各項

$$\cos nx \qquad \text{および} \qquad \sin nx \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$$

の周期は、それぞれ $2\pi, \dfrac{2\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{4}, \cdots$ となり、図 2.1 のように 2π の幅の区間にそれぞれ 1 回転分, 2 回転分, 3 回転分, $\cdots$ の波形を含みます。したがって、これらの総和 (フーリエ級数) は周期 2π を持つことになり、もし、関数 $f(x)$ が周期 2π を持てば、区間 $[-\pi, \pi]$ についてフーリエ級数展開するだけで**全区間**をフーリエ級数で表現したことになります。

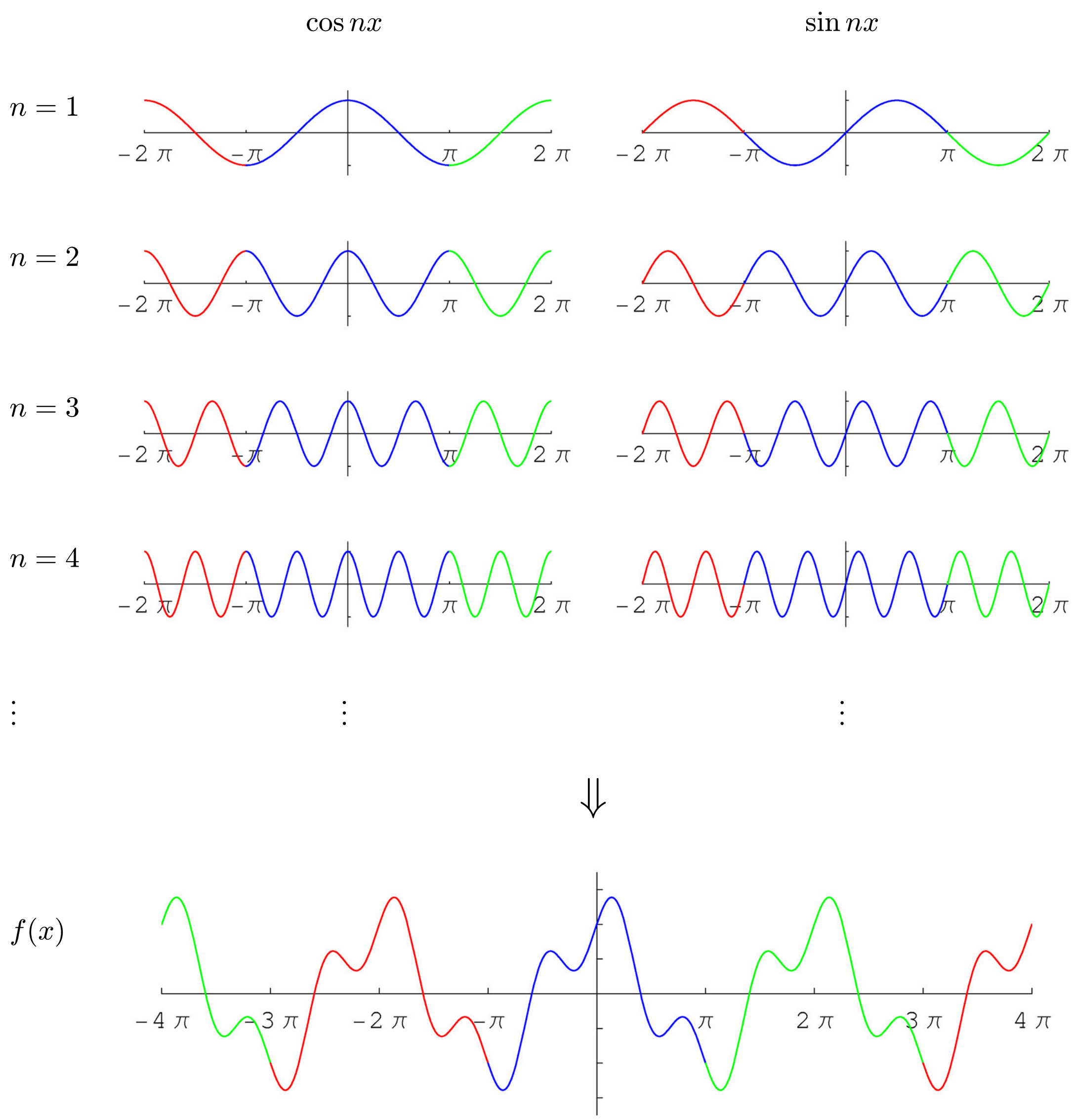


図 2.1: 周期 2π を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数

一般には、周期 2π を持つ関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開するには、積分区間を $[a, a+2\pi]$ にとって、フーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad \text{および} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

を求めればよいことがわかります[4]。

2.3.1　周期 2π を持つ関数のフーリエ級数展開

前述の考察より、周期 2π を持つ (周期) 関数 $f(x)$ のフーリエ級数を以下のように改めましょう。

定理 2.5 周期 2π を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

である。ただし、

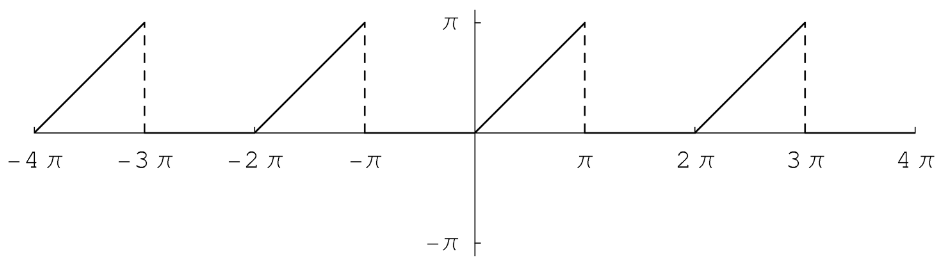
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

をフーリエ係数とする。

例として、周期 2π を持つ関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0), \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

をフーリエ級数展開して、フーリエ級数を求めてみましょう。参考までに、関数 $f(x)$ のグラフは下図のようになります。なお、このような波形を**三角波**または**のこぎり波**と呼びます。



[4] 書籍によっては積分区間を $[0, 2\pi]$ とするものもありますが、本テキストでは断りのない限り $[-\pi, \pi]$ を使用することにします。

フーリエ級数を求めるには、フーリエ係数を求めればよいので、以下のように計算します。

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx \\
&= (0-0) - \frac{1}{k\pi}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} \qquad (\because \sin k\pi = 0) \\
&= -\frac{1}{k^2\pi}(-\cos k\pi - (-1)) = -\frac{-(-1)^k+1}{k^2\pi} \qquad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\
&= -\frac{1+(-1)^{k-1}}{k^2\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi}-\cos kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{-\cos k\pi}{k} - 0\right) - \frac{1}{k\pi}\left[\frac{-\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{-\cos k\pi}{k} - 0\right) - (0-0) \qquad (\because \sin k\pi = 0) \\
&= \frac{-(-1)^k}{k} \qquad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{k}.
\end{aligned}$$

以上より、周期 2π を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right)$$

となります。ついでですから、グラフを描くことで、フーリエ級数の部分和

$$S_k(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right)$$

が関数 $f(x)$ に収束していく様子を観察しておきましょう (図 2.2)。

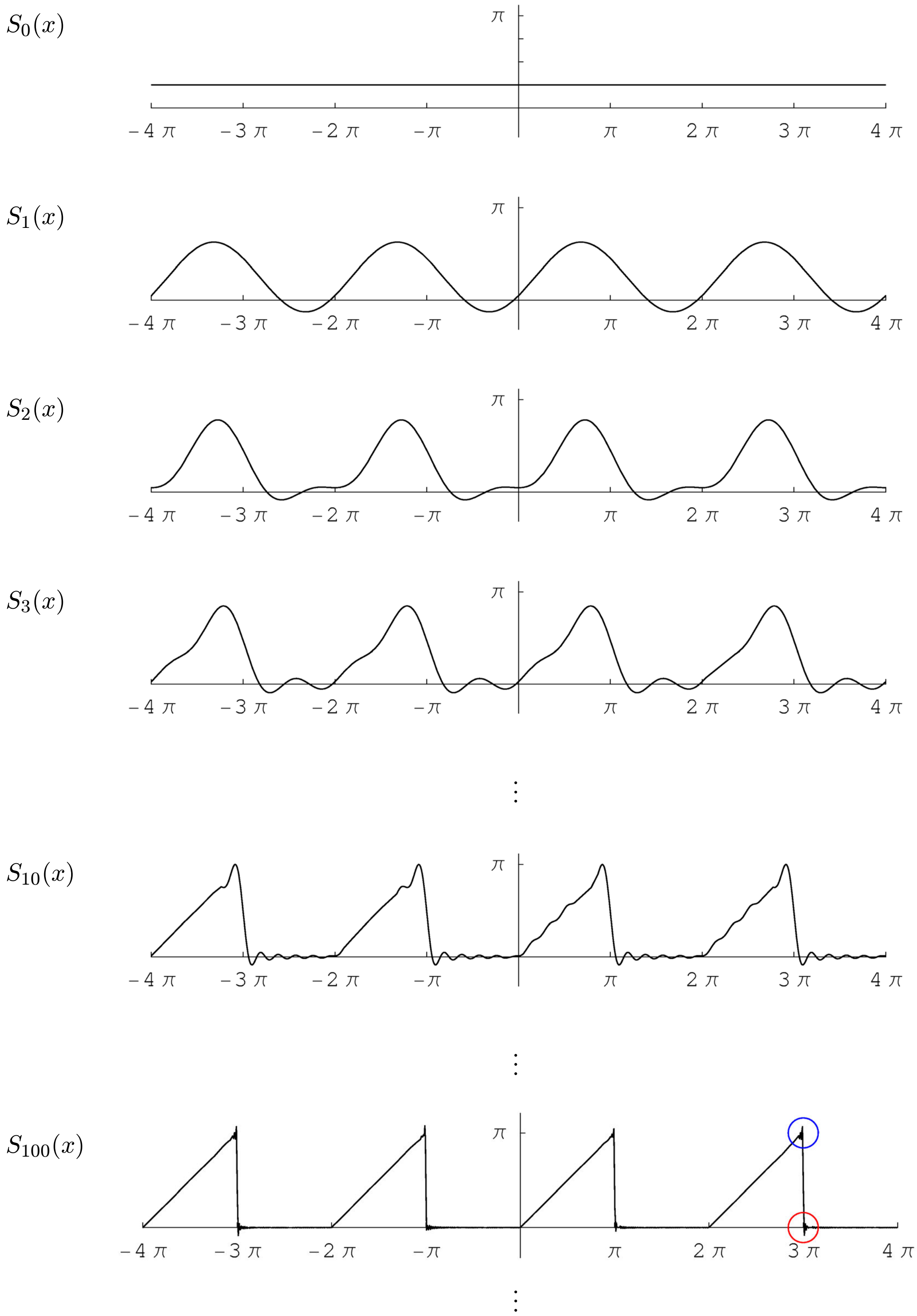


図 2.2: フーリエ級数が収束していく様子

なお、図 2.2 の $S_{100}(x)$ の青丸〇と赤丸〇の部分を拡大すると図 2.3 のようになっており、これは**ギブスの現象**と呼ばれています。この現象は極限をとることで消えて、関数 $f(x)$ に収束します。

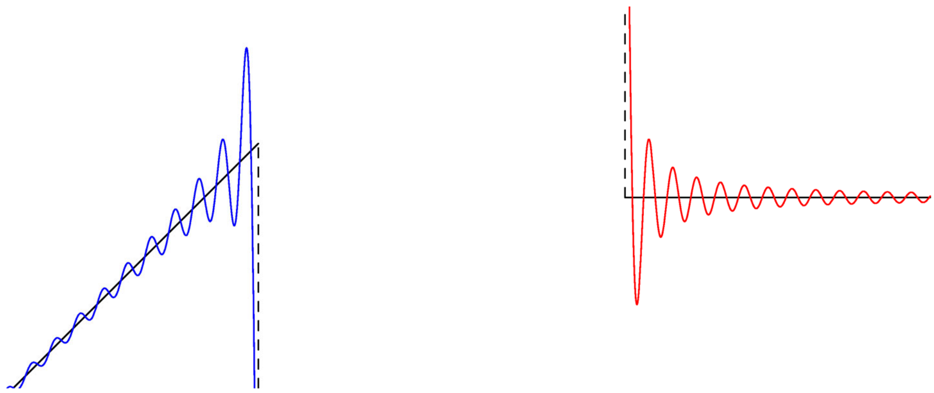


図 2.3: ギブスの現象

また、三角関数によるフーリエ級数と同様に、指数関数によるフーリエ級数で求めることもできます。指数関数によるフーリエ係数を求めると、

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4},\\
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,e^{-ikx}\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-ik}\,x\,e^{-ikx}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{ik}\,\pi\,e^{-ik\pi} - 0\right) - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-ik}\,e^{-ikx}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{ik}\,\pi\,e^{-ik\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{ik}\,e^{-ik\pi} - \left(-\frac{1}{ik}\right)\right)\\
&= i\frac{1}{2k\pi}\Big((\pi-1)\cdot(-1)^k + 1\Big) \qquad (\because\ e^{ik\pi} = (-1)^k)
\end{aligned}$$

となり、したがって、指数関数によるフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{+\infty} i\frac{1}{2n\pi}\left((\pi-1)\cdot(-1)^n + 1\right) e^{inx}\,dx$$

となります。この章では、三角関数によるフーリエ級数を中心に扱いますが、指数関数によるフーリエ級数への対応や複素フーリエ係数の計算もできるようにしておいてください。以後、単にフーリエ級数・フーリエ係数・フーリエ級数展開と記述してある場合は、三角関数によるフーリエ級数・三角関数によるフーリエ係数・三角関数によるフーリエ級数展開を指すことにし、指数関数による場合は、複素を付加して表すことにします。

ある関数のフーリエ級数展開を求めるには、大量の計算を必要とします。そこで、1 つの方法として、関数 $f(x)$ が偶関数 $(f(-x)=f(x))$ の場合と奇関数 $(f(-x)=-f(x))$ の場合のフーリエ級数展開を考えましょう。まず、偶関数 $f(x)$ の場合のフーリエ級数を求めてみます。偶関数の条件 $f(-x)=f(x)$ を考慮して、フーリエ係数 a_k を

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k=0,1,2,\cdots) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x=-t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos k(-t)\,(-dt) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 a_k は、

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

となります。同じく、フーリエ係数 b_k を

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x=-t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin k(-t)\,(-dt) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 b_k は、

$$b_k = 0 \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

となります。ゆえに、偶関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + 0\cdot\sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \end{aligned}$$

となります。なお、このフーリエ級数は**フーリエ余弦級数**と呼ばれます。以上をまとめると、次の系を得ます。

系 2.6 周期 2π を持つ**偶**関数 $f(x)$ のフーリエ**余弦**級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

である。ただし、

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

をフーリエ係数とする。

同様に、奇関数 $f(x)$ の場合のフーリエ級数を求めましょう。奇関数の条件 $f(-x) = -f(x)$ を考慮して、フーリエ係数 a_k を

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x = -t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos k(-t)\,(-dt) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 a_k は、

$$a_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

となります。同じく、フーリエ係数 b_k を

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x = -t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin k(-t)\,(-dt) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 b_k は、

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

となります。ゆえに、奇関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(0 \cdot \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \end{aligned}$$

となります。なお、このフーリエ級数は**フーリエ正弦級数**と呼ばれます。以上をまとめると、次の系を得ます。

系 2.7 周期 2π を持つ**奇**関数 $f(x)$ のフーリエ**正弦**級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

である。ただし、

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin kx\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

をフーリエ係数とする。

定理 2.5・系 2.6・系 2.7 をまとめると、下表のようになります。

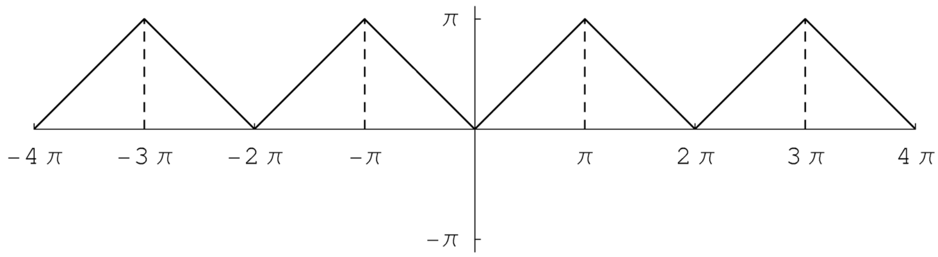
	フーリエ級数	フーリエ係数
関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx,$ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$
偶関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$	$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$
奇関数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$	$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$

表 2.2: 周期 2π を持つ偶関数および奇関数のフーリエ級数

例題 1　周期 2π を持つ偶関数

$$f(x) = \begin{cases} -x & (-\pi \le x < 0), \\ x & (0 \le x < \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数を求めなさい。



解答例　偶関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x \cdot \frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx \\ &= (0-0) - \frac{2}{k\pi}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} \qquad (\because \sin k\pi = 0) \\ &= -\frac{2}{k^2\pi}(-\cos k\pi - (-1)) = -2\,\frac{-(-1)^k + 1}{k^2\pi} \qquad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\ &= -2\,\frac{1+(-1)^{k-1}}{k^2\pi} \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2π を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

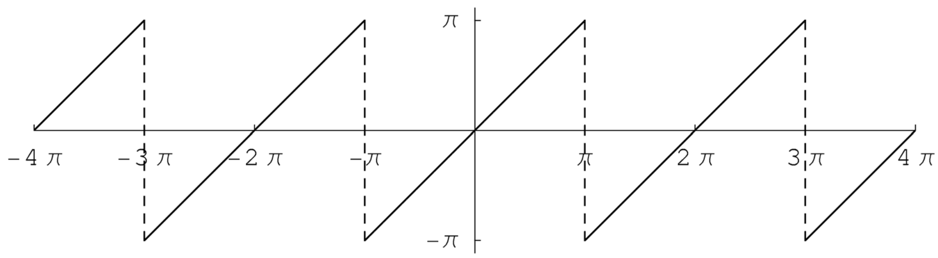
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -2\,\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2\pi}\cos nx$$

となる。

例題 2　周期 2π を持つ奇関数

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

のフーリエ級数を求めなさい。



解答例　奇関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\sin kx\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x \cdot \frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k}\int_0^{\pi} -\cos kx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} - 0\right) - \frac{2}{k\pi}\left[\frac{-\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} - 0\right) - (0 - 0) \qquad (\because \sin k\pi = 0) \\
&= 2\,\frac{-(-1)^k}{k} \qquad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\
&= 2\,\frac{(-1)^{k-1}}{k}
\end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2π を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

となる。

2.3.2　周期 $2L$ を持つ関数のフーリエ級数展開

これまで、周期関数の中でも周期 2π を持つ特定の周期関数を扱ってきました。この節では、周期 2π を持つ周期関数を拡張し、一般的な周期 $2L$ を持つ周期関数のフーリエ級数を導きましょう。

周期 $2L$ を持つ関数 $f(x)$ は、関係

$$f(x+2L)=f(x)$$

を満たします。ここで、(比例) 関係

$$t=\frac{\pi}{L}x \iff x=\frac{L}{\pi}t \qquad (2L \text{ を } 2\pi \text{に伸縮})$$

を使って変数変換をすると

$$f\left(\frac{L}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$$

となり、$f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ は周期 2π を持つ周期関数となります。したがって、$f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ のフーリエ級数は、

$$f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt\,dt+b_n\sin nt\,dt)$$

となり、フーリエ係数は、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{L}{\pi}t\right)\cos kt\,dt \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{L}{\pi}t\right)\sin kt\,dt \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

となります。以上より、$t=\dfrac{\pi}{L}x$ および $dt=\dfrac{\pi}{L}dx$ を使って x の式に戻すと、次の定理を得ます。

定理 2.8 周期 $2L$ を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

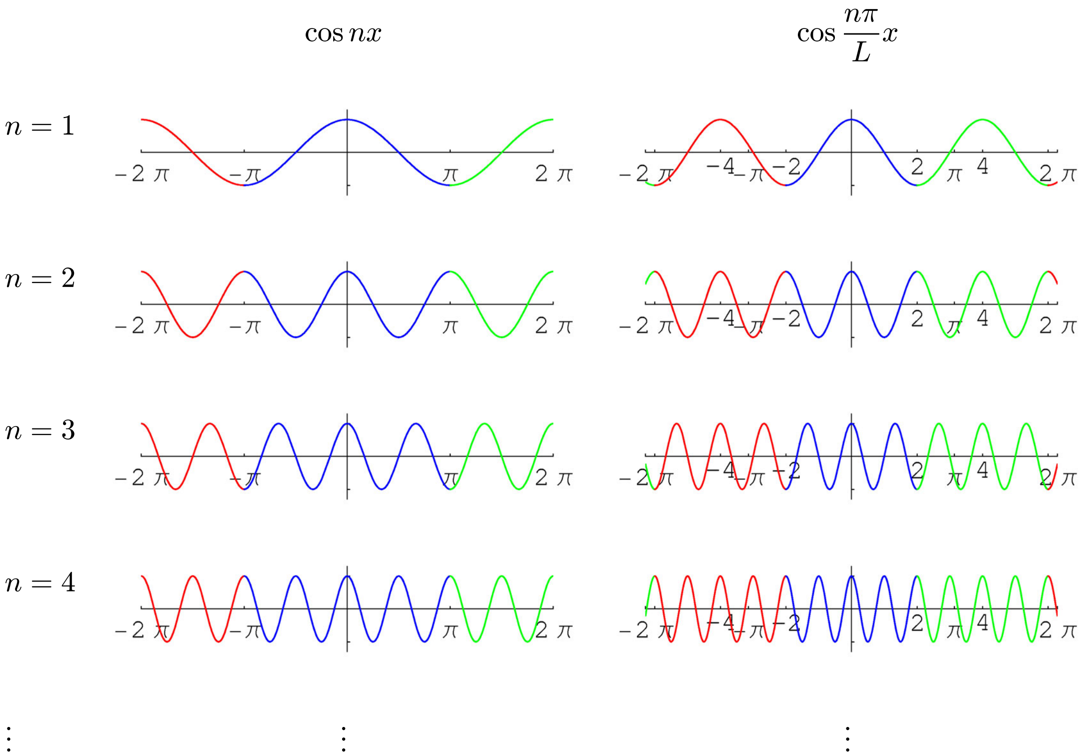
である。ただし、

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{k\pi}{L}x\,dx \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

をフーリエ係数とする。

この定理のフーリエ級数を構成する各項の三角関数は、図 2.4 のように周期 2π の三角関数を $\dfrac{L}{\pi}$ 倍に伸縮したものとなっています。そのため、その総和であるフーリエ級数の周期も $2L\left(=\dfrac{L}{\pi}\cdot 2\pi\right)$ となります (図 2.5)。



* 上図は、$L=2$ として cos 関数について比較したものです (sin 関数も同様)。

図 2.4: 三角関数と $\dfrac{L}{\pi}$ 倍に伸縮された三角関数の比較

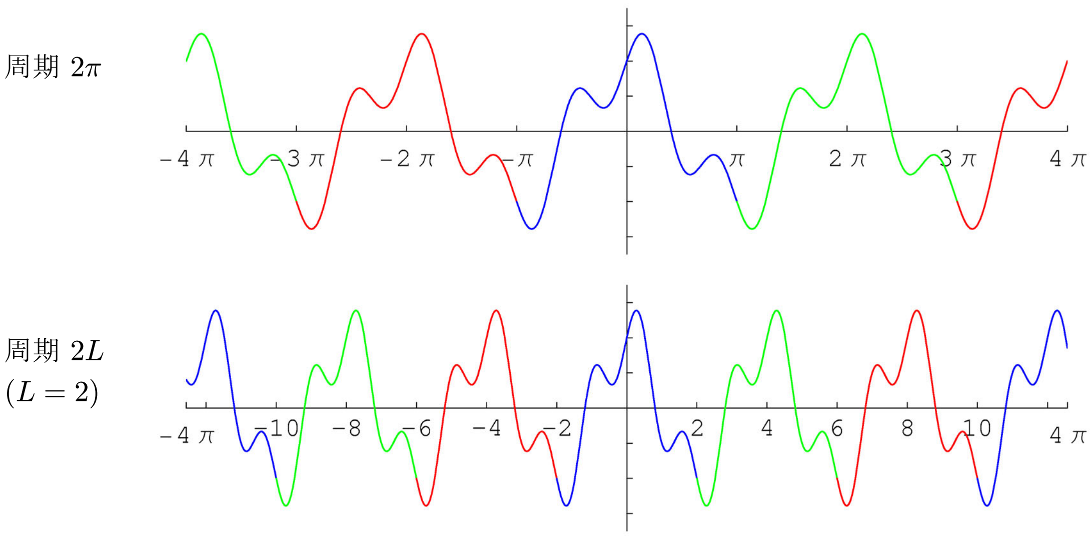


図 2.5: 周期 2π のフーリエ級数と $\dfrac{L}{\pi}$ 倍に伸縮されたフーリエ級数の比較

周期 2π を持つ関数のフーリエ級数と同様に、関数が偶関数の場合と奇関数の場合のフーリエ級数を求めると、以下の系が得られます。

系 2.9 周期 $2L$ を持つ**偶**関数 $f(x)$ のフーリエ**余弦**級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

である。ただし、

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

をフーリエ係数とする。

系 2.10 周期 $2L$ を持つ**奇**関数 $f(x)$ のフーリエ**正弦**級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

である。ただし、

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

をフーリエ係数とする。

定理 2.8・系 2.9・系 2.10 をまとめると、下表のようになります。

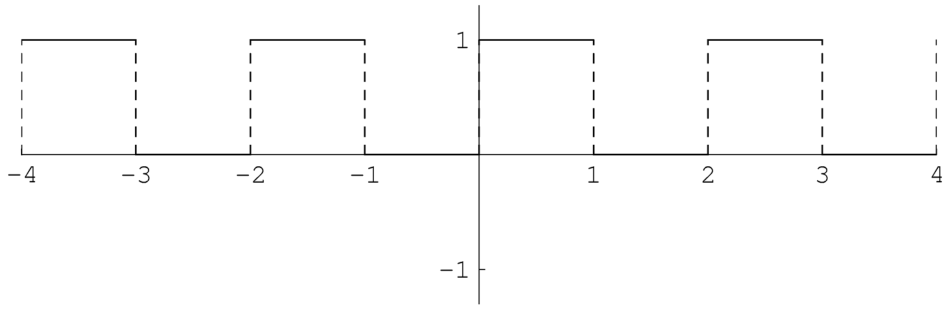
	フーリエ級数	フーリエ係数
関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$	$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx,$ $b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx$
偶関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$	$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x \, dx$
奇関数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$	$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x \, dx$

表 2.3: 周期 $2L$ を持つ偶関数および奇関数のフーリエ級数

例題 1　周期 2 ($L=1$) を持つ関数

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-1\le x<0),\\[2ex] 1 & (0\le x<1)\end{cases}$$

のフーリエ級数を求めなさい。



解答例　フーリエ係数を求めると、

$$a_0=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_0^1 1\,dx=\big[\,x\,\big]_0^1=1,$$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\,\cos\frac{k\pi}{1}x\,dx=\int_0^1\cos k\pi x\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots)\\ &=\left[\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_0^1=0-0=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\,\sin\frac{k\pi}{1}x\,dx=\int_0^1\sin k\pi x\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots)\\ &=\left[\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right]_0^1=\frac{(-\cos k\pi-(-1))}{k\pi}\\ &=\frac{1-(-1)^k}{k\pi} \qquad (\because \cos k\pi=(-1)^k)\end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2 を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x$$

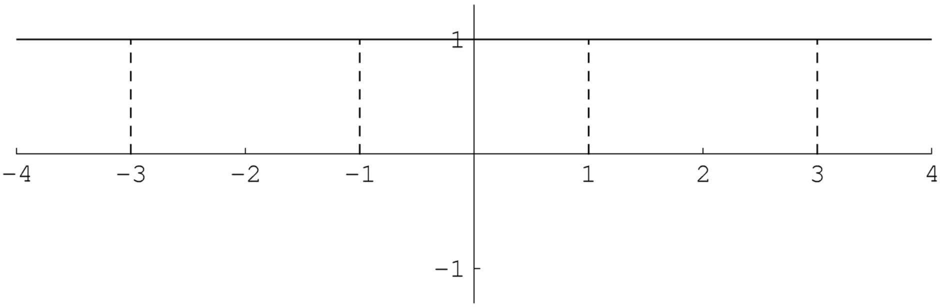
となる。

* 上図のような波形を**方形波**と呼びます。

例題 2　周期 2 ($L=1$) を持つ偶関数

$$f(x) = 1 \ (-1 \leq x < 1)$$

のフーリエ余弦級数を求めなさい。



解答例　偶関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 1\,dx = 2\big[\,x\,\big]_0^1 = 2,$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\cos\frac{k\pi}{1}x\,dx = 2\int_0^1 \cos k\pi x\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$= 2\left[\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_0^1 = 2\,(0-0) = 0$$

となる。したがって、周期 2 を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim 1 \qquad (\Longleftrightarrow f(x) = 1)$$

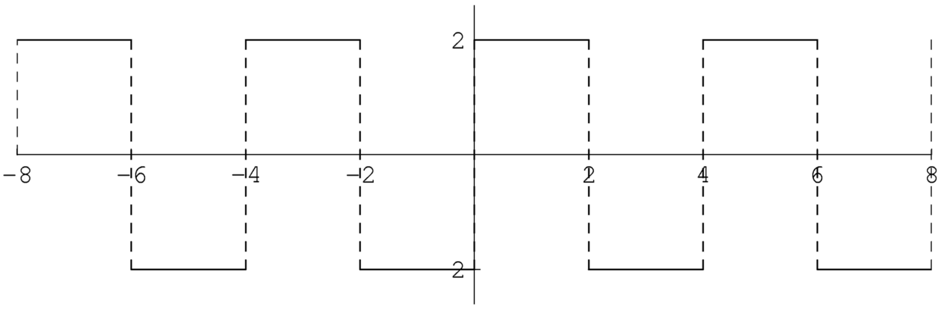
となる。

* 例題 1 と例題 2 は、cos 関数を必要としないフーリエ級数の特殊な例です。同様に、sin 関数を必要としないフーリエ級数もあります。

例題 3　周期 4 $(L=2)$ を持つ奇関数

$$f(x)=\begin{cases} -2 & (-2\le x<0), \\ 2 & (0\le x<2) \end{cases}$$

のフーリエ級数を求めなさい。



解答例　フーリエ係数を求めると、

$$b_k=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx=\int_0^2 2\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx \qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

$$=2\left[\frac{2}{k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_0^2=\frac{4}{k\pi}(-\cos k\pi-(-1))$$

$$=\frac{4\,(1-(-1)^k)}{k\pi} \qquad (\because \cos k\pi=(-1)^k)$$

となる。したがって、周期 2 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\,(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

となる。

* 例題 3 のフーリエ級数は、例題 1 のフーリエ級数を $\frac{1}{2}$ だけ下に平行移動し、振幅を 4 倍し、周期を 2 倍したフーリエ級数と同じになります。