## 2.4　フーリエ級数の収束

この節では、フーリエ級数展開で得られたフーリエ級数が収束する場合に、フーリエ級数が再び元の関数に収束 (一致) することを示しましょう。なお、ここで扱う関数は、**区分的に連続**かつ**区分的になめらか**な周期 $2\pi$ の周期関数とします[5] (p.26 参照)。

まず、区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ を三角関数を使って

$$A_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

と近似したとします[6]。このとき、$f(x)$ の $A_n(x)$ による**平均 2 乗誤差**

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - A_n(x)|^2 \, dx$$

について、次の定理が成り立ちます。

**定理 2.11** $\delta_n$ は $A_n(x)$ の係数 $c_k$, $d_k$ がそれぞれ $f(x)$ のフーリエ係数 $a_k$, $b_k$ のとき最小となる。

**証明**　$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)$ とおくと、$A_n(x) = \frac{c_0}{2} + B_n(x)$ となり、平均 2 乗誤差は

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left((f(x))^2 + \frac{c_0^2}{4} + (B_n(x))^2 - c_0 f(x) + c_0 B_n(x) - 2f(x)B_n(x)\right) dx$$

と書き直される。ここで、それぞれ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_0^2}{4}\, dx = \left[\frac{c_0^2}{4}x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{c_0^2}{4}\pi - \left(\frac{c_0^2}{4}(-\pi)\right) = \pi\frac{c_0^2}{2},$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}(B_n(x))^2 dx &= \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} c_k^2 \cos^2 kx\, dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} d_k^2 \sin^2 kx\, dx + \sum_{k=1,l=1}^{n,n}\int_{-\pi}^{\pi} c_k d_l \cos kx \sin lx\, dx \\
&\quad + \sum_{k\neq l}\int_{-\pi}^{\pi} c_k c_l \cos kx \cos lx\, dx + \sum_{k\neq l}\int_{-\pi}^{\pi} d_k d_l \sin kx \sin lx\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx + \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx + \sum_{k=1,l=1}^{n,n} c_k d_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx\, dx \\
&\quad + \sum_{k\neq l} c_k c_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\, dx + \sum_{k\neq l} d_k d_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \pi c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \pi d_k^2 + 0 + 0 + 0 = \pi\sum_{k=1}^{n}(c_k^2 + d_k^2),
\end{aligned}$$

[5] フーリエ級数を用いた解析では、区分的に連続という条件を入れても応用上十分であることがほとんどなので、区分的に連続であることを仮定しておきます。また、周期については、周期の伸縮によって任意の周期にすることができますが、簡単のため周期を $2\pi$ に固定して話を進めます。

[6] フーリエ級数の部分和とは異なります。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} B_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} c_k\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} d_k\sin kx\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{n} d_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = 0+0=0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)B_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,c_k\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d_k\sin kx\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{n} d_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k(\pi a_k) + \sum_{k=1}^{n} d_k(\pi b_k) = \pi\sum_{k=1}^{n}(a_kc_k+b_kd_k)
\end{aligned}$$

となる。したがって、平均 2 乗誤差は

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx + \frac{1}{2}\left(\frac{c_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k^2+d_k^2) - c_0a_0 - 2\sum_{k=1}^{n}(a_kc_k+b_kd_k)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx + \frac{1}{2}\left(\frac{(c_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left((c_k-a_k)^2+(d_k-b_k)^2\right)\right) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)
\end{aligned}$$

となり、$c_k = a_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ および $d_k = b_k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき、すなわち、フーリエ係数のとき最小となる。 ■

ここで、$\sigma_n^2 \geq 0$ に注意して $c_k = a_k$ かつ $d_k = b_k$ とすると、不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx$$

が成り立ちます。この不等式は $n$ がいくつでも成り立つことから、次の系を得ます。

**系 2.12 (ベッセル (Bessel) の不等式)** 関数 $f(x)$ のフーリエ係数 $a_k$, $b_k$ に対して、不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx$$

が成り立つ。

なお、関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和を

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

とおき、

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,dx=0$$

を満たせば、ベッセルの不等式の等号が成り立ち、等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

が成り立ちます[7]。この等式は**パーセバル (Parseval) の等式**と呼ばれます。また、ベッセルの不等式より、直ちに次の定理が得られます。

**定理 2.13 (リーマン (Riemann)・ルベーグ (Lebesgue) の定理)** 関数 $f(x)$ のフーリエ係数 $a_k$, $b_k$ に対して、

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\longrightarrow 0\qquad(k\longrightarrow\infty),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\longrightarrow 0\qquad(k\longrightarrow\infty)$$

が成り立つ。

それでは、いくつか準備を行なった後に、フーリエ級数の収束について証明しましょう。

**補題 2.14** (区分的に連続な) 関数 $f(x)$ に対して、$n$ を自然数とするとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx=0$$

が成り立つ。

**証明**　まず、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\sin\frac{1}{2}x\right)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\cos\frac{1}{2}x\right)\sin nx\,dx$$

と展開する。ここで、関数 $f(x)$ が区分的に連続な関数であるから、$f(x)\sin\frac{x}{2}$, $f(x)\cos\frac{x}{2}$ は、再び区分的に連続な関数となる。したがって、上式の両辺にそれぞれ極限をとれば、リーマン・ルベーグの定理より、その極限値は 0 となる。 ■

[7]関数 $f(x)$ が連続関数かつ積分可能で、$S_n(x)$ が一様収束するときに等号が成立します。すなわち、任意の $\varepsilon>0$ に対して $|f(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ が成り立つときに等号が成立します。なお、不連続な点 $x$ を含む関数の場合は、

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\to f(x)$$

と定義し直すことで、$S_n(x)$ が一様収束し、パーセバルの等式が成り立ちます。もちろん、区分的に連続と区分的になめらかという条件が入ります。

**補題 2.15** $n$ を自然数とするとき、等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}\,dx=\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}\,dx=\frac{1}{2}$$

が成り立つ。

**証明**

$$2\cos kx\sin\frac{1}{2}x=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

より、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right)\cdot\sin\frac{1}{2}x\\&=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)+\left(\sin\frac{7}{2}x-\sin\frac{5}{2}x\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\end{aligned}$$

となる。両辺を $\sin\dfrac{1}{2}x$ で割ると

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}$$

を得る。したがって、

$$\int_{-\pi}^{0}\cos kx\,dx=\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{0}=0$$

に注意して、上式の両辺を定積分すると

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{2}$$

を得る。同様に、

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{1}{2}x}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\right]_{0}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

を得る。 ■

**補題 2.16** 関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和 $S_n(x)$ を

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

とすると、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt$$

と変形できる[8]。

**証明**

$$\begin{aligned}
&a_k \cos kx + b_k \sin kx \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du\right)\sin kx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos ku\cos kx + \sin ku \sin kx)\,du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos k(u-x)\,du
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos k(u-x)\,du\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right)du
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、補題 2.15 の証明の前半部分から

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x) = \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(u-x)}$$

を得て、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\dfrac{1}{2}(u-x)}\,du$$

[8] この積分を**ディリクレ (Dirichlet) 積分**といい、$\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$ を**ディリクレ (Dirichlet) 核**といいます。

と変形できる。さらに、$t = u - x$ とおいて変数変換すると、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

を得る。このとき、関数 $f(x)$ は周期 $2\pi$ の関数であるから、1 周期であればどの区間で積分しても積分の値は変わらない。したがって、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

を得る。 ■

**補題 2.17** 関数 $f(x)$ が区分的に連続かつ区分的になめらかなとき、

$$\frac{f(x+t)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t} \text{ は } -\pi \leq t \leq 0 \text{ で、}$$

$$\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t} \text{ は } 0 \leq t \leq \pi \text{ で、}$$

それぞれ区分的に連続である。

**証明**　関数 $f(x)$ が区分的に連続であるから、

$$\frac{f(x+t)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

は、任意の数 $a$ $(-\pi < a < 0)$ に対して、$-\pi \leq t \leq a$ で区分的に連続である。$t = -0$ については、

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t} &= \lim_{t\to-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\\ &= \lim_{t\to-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} \qquad (\because \lim_{h\to\pm0}\frac{\sin h}{h} = 1)\end{aligned}$$

となる。ここで、関数 $f(x)$ が区分的になめらかであるから、

$$\lim_{t\to-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} = \lim_{t\to-0}\frac{f(x-0+t)-f(x-0)}{t} = f'(x-0) \quad (\neq \pm\infty)$$

となる。したがって、与式は $-\pi \leq t \leq 0$ で区分的に連続である。同様に、

$$\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

は $0 \leq t \leq \pi$ で区分的に連続である。 ■

準備が整ったので、フーリエ級数の収束を証明しましょう。次の定理を得ます。

**定理 2.18** 関数 $f(x)$ が周期 $2\pi$ を持ち、区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続かつ区分的になめらかであれば、$f(x)$ のフーリエ級数は、

- $f(x)$ が連続な点 $x$ で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ が不連続な点 $x$ で $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に収束

する。

**証明**　関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和を $S_n(x)$ とすると、補題 2.16 より、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt \quad \cdots ①$$

となる。また、補題 2.15 より、

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt \quad \cdots ②$$

となる。上の 2 式から、① − ②を計算すると、

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \quad \cdots ③ \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

となる。ここで、補題 2.17 より、

$$\frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\dfrac{1}{2}t} \text{ は } -\pi \le t \le 0, \qquad \frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\dfrac{1}{2}t} \text{ は } 0 \le t \le \pi$$

で区分的に連続である。したがって、補題 2.14 より、$n \longrightarrow \infty$ のとき、③式と④式はそれぞれ 0 に収束する。すなわち、

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

を得る。なお、$f(x)$ が連続な点 $x$ の場合は、$f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ が成り立ち、

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$$

を得る。 ■