第 3 章　フーリエ変換

3.1　フーリエ積分とフーリエ変換

第 2 章では、周期を持つ関数のフーリエ級数について学びました。この章では、最初に、周期を持つ関数のフーリエ級数を拡張し、周期を持たない (一般的な) 関数のフーリエ級数を導きましょう。具体的には、関数 $f(x)$ を区間 $-L \leq x \leq L$ で考え、この L を限りなく大きくするというアプローチを取ります ($L \longrightarrow \infty$)。**なお、ここで扱う関数 $f(x)$ は、$(-\infty, \infty)$ で定義されていて、**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M < \infty$$

を満足しているとします (もちろん、区分的に連続かつ区分的になめらかとします)。

まず、関数 $f(x)$ を周期 $2L$ を持つ関数と考え、区間 $-L \leq x \leq L$ でフーリエ級数展開すると、関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{k\pi}{L} t\, dt & (k = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_k = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{k\pi}{L} t\, dt & (k = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

となります。ここで、$L \longrightarrow \infty$ を考えることにします。$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M < \infty$ に注意すれば、

$$\lim_{L\to\infty} |a_0| = \lim_{L\to\infty} \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt \right| \leq \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \lim_{L\to\infty} \frac{M}{L} = 0$$

となり、$a_0 = 0$ が得られます。さらに、$\dfrac{\pi}{L} = \Delta u$ とおき、$L \longrightarrow \infty$ $(\Delta u \longrightarrow 0)$ を考えると、

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x &= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt\right)\cos\frac{n\pi}{L}x \\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta u}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\Delta u}}^{\frac{\pi}{\Delta u}} f(t)\cos n\Delta u t\,dt\right)\cos n\Delta u x \\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos n\Delta u t\,dt\right)\cos n\Delta u x\right)\Delta u \\
&= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt\right)\cos ux\,du \qquad (\because \text{区分求積法})
\end{aligned}$$

が得られます。同様に、

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x &= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\,dt\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta u}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\Delta u}}^{\frac{\pi}{\Delta u}} f(t)\sin n\Delta u t\,dt\right)\sin n\Delta u x \\
&= \lim_{\Delta u\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin n\Delta u t\,dt\right)\sin n\Delta u x\right)\Delta u \\
&= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt\right)\sin ux\,du \qquad (\because \text{区分求積法})
\end{aligned}$$

が得られます。したがって、周期を持たない関数のフーリエ級数 (**フーリエ積分**) は次の定理によって与えられます。

定理 3.1 関数 $f(x)$ の (三角関数による) **フーリエ積分**は、

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} A(u)\cos ux\,du + \int_0^{\infty} B(u)\sin ux\,du \qquad \cdots ①$$

である。ただし、

$$\begin{cases} A(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \\ B(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt \end{cases} \qquad \cdots ②$$

とする[1]。なお、①式を関数 $f(x)$ の**フーリエ積分**と呼ぶ。

続けて、①式を変形すると、

$$\begin{aligned}
A(u)\cos ux + B(u)\sin ux &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos ut\cos ux + \sin ut\sin ux)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(x-t)u\,dt
\end{aligned}$$

[1] $A(u)$ と $B(u)$ は、周期を持つ関数をフーリエ級数展開した際に得られるフーリエ係数に相当します。

より、

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(x-t)u\,dtdu$$

となります。さらに、

$$\cos\theta = \cos(-\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{e^{i(x-t)u}+e^{-i(x-t)u}}{2}\,dtdu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{i(x-t)u}\,dtdu + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i(x-t)u}\,dtdu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i(x-t)v}\,dtdv + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i(x-t)u}\,dtdu \\
&\qquad (\because u=-v \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i(x-t)u}\,dtdu \qquad (\because v \text{ を } u \text{ とおき直す}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}\,dt\right)e^{iux}\,du
\end{aligned}$$

となります。ここで、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}\,dt$$

とおくと、次の定理を得ます (三角関数によるフーリエ積分を指数関数で表現し直したもの)。

定理 3.2 関数 $f(x)$ の (指数関数による) **フーリエ積分**は、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(u)e^{iux}\,du \qquad \cdots ①'$$

である。ただし、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}\,dt \qquad \cdots ②'$$

とする[2]。なお、②′ 式を関数 $f(x)$ の**フーリエ変換** (Fourier transform) と呼ぶ。

また、①′ 式と ②′ 式の積分の形が対称的によく似ていることと、②′ 式では関数 $f(x)$ を積分して関数 $F(u)$ が得られるのに対して ①′ 式では関数 $F(u)$ を積分して関数 $f(x)$ が得られることから、①′ 式 (**フーリエ積分**) を関数 $f(x)$ の**逆フーリエ変換**または**反転公式**と呼びます[3]。

[2] $F(u)$ は、周期を持つ関数を複素フーリエ級数展開した際に得られる複素フーリエ係数に相当します。
[3] 下記のように、②′ 式の変数 t を変数 x に書き換えると対称的によく似ていることがわかります。

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux}\,dx \qquad \leftarrow \text{標準的な書き方}$$

これまで見てきたように、フーリエ積分 (逆フーリエ変換) およびフーリエ変換の表記方法には、三角関数による表現と指数関数による表現があります。以後、本テキストでは、基本的に、表現のシンプルな指数関数による表現で記述することにします (一般的な書籍も指数関数による表現が標準となっています)。ただし、三角関数による表現の方がシンプルな場合は、三角関数による表現で記述します。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を使って、互いに変換できるようにしておきましょう (p.15 参照)。

例として、区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めてみましょう。定理より、関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} 1\cdot e^{-iut}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-iu}e^{-iut}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{i(e^{-iu}-1)}{u} \end{aligned}$$

となります。ここで、関数 $F(u)$ を調べるために、三角関数による表現に直すと、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{i(\cos(-u)+i\sin(-u)-1)}{u} \\ &= \frac{\sin u}{2\pi u} + i\frac{\cos u - 1}{2\pi u} \end{aligned}$$

となります。u を変数として、関数 $F(u)$ の実部 $\mathrm{Re}\,F(u)$ および虚部 $\mathrm{Im}\,F(u)$ のグラフを描くと図 3.1 のようになります。

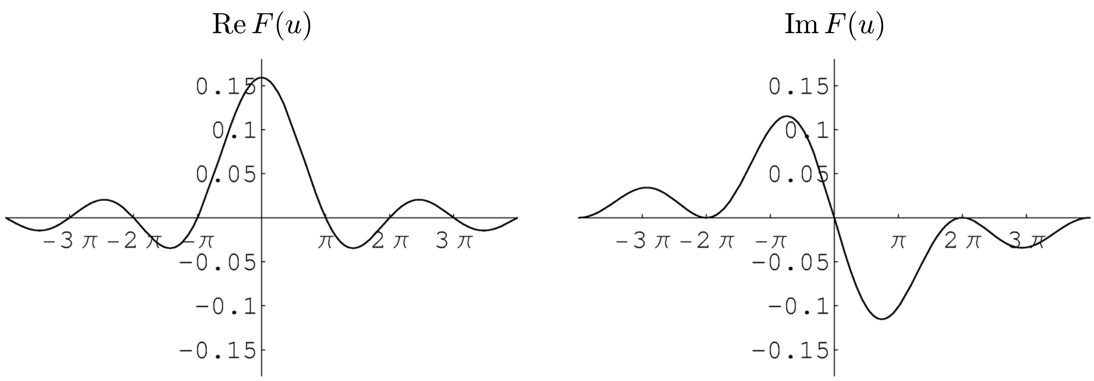


図 3.1: 関数 $F(u)$ の実部および虚部のグラフ

また、関数 $F(u)$ を波として捉えると、振幅の絶対値 $|F(u)|$ は、

$$
\begin{aligned}
|F(u)|^2 &= \left(\frac{\sin u}{2\pi u}\right)^2 + \left(\frac{\cos u - 1}{2\pi u}\right)^2 = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u - 2\cos u + 1}{4\pi^2 u^2} \\
&= \frac{2 - 2\cos u}{4\pi^2 u^2} = \frac{1}{\pi^2 u^2} \cdot \frac{1 - \cos u}{2} \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \\
&= \frac{1}{\pi^2 u^2}\left(1 - \cos^2\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2 u^2}\sin^2\frac{u}{2} \qquad (\because \text{半角の公式})
\end{aligned}
$$

より、

$$
|F(u)| = \left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{\pi u}\right|
$$

となり、偏角 θ は、

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \left(\frac{\cos u - 1}{2\pi u}\right)\Big/\left(\frac{\sin u}{2\pi u}\right) = \left(-\frac{1 - \cos u}{2}\right)\Big/\left(\frac{\sin u}{2}\right) \\
&= \left(-\sin^2\frac{u}{2}\right)\Big/\left(\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\right) \qquad (\because \text{半角の公式}) \\
&= -\tan\frac{u}{2} = \tan\left(-\frac{u}{2}\right)
\end{aligned}
$$

より、区間 $2n\pi \le u < 2(n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ において、

$$
\theta = -\frac{u}{2} + n\pi
$$

となります[4]。u を変数として、関数 $F(u)$ の振幅の絶対値 $|F(u)|$ および偏角 θ のグラフを描くと図 3.2 のようになります。

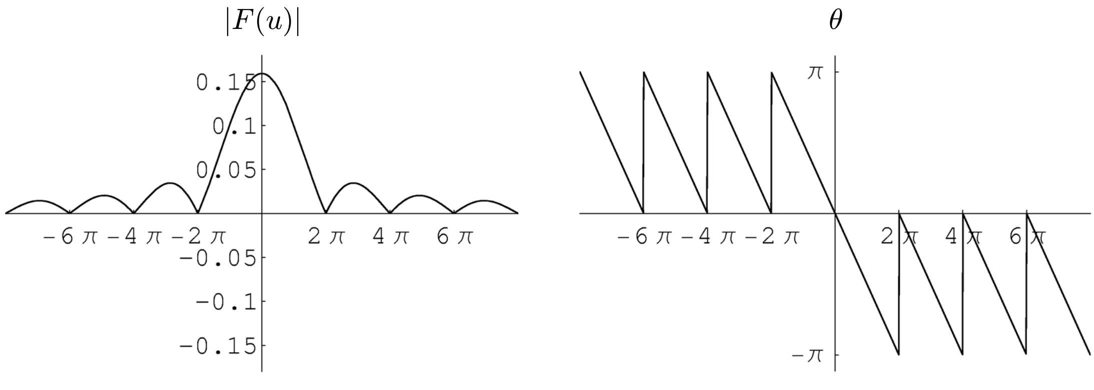


図 3.2: 関数 $F(u)$ の振幅および偏角のグラフ

このような考察は、フーリエ変換を用いて波を解析する上で非常に重要となります。これからも、ここに描かれたグラフによく似たグラフがたくさん現れるので注目するようにしましょう。

[4]図 3.2 の偏角 θ のグラフの線はつながっていますが、実際には、点 $u = 2n\pi$ における θ の値は 0 となります。

フーリエ級数の場合と同様に、関数が偶関数の場合と奇関数の場合のフーリエ積分を求めると、以下の系が得られます。

系 3.3 **偶**関数 $f(x)$ の**フーリエ積分**は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux \, du$$

である。ただし、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt$$

とする。なお、$C(u)$ を**フーリエ余弦変換**と呼ぶ。

証明　定理 3.1 より、フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du$$

である。ここで、関数 $f(x)$ が偶関数 $(f(-x) = f(x))$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t) \cos ut \, dt + \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \\
&= \int_{\infty}^{0} f(-s) \cos u(-s) \, (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \\
&\qquad\qquad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \int_0^{\infty} f(-s) \cos(-us) \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \\
&= \int_0^{\infty} f(s) \cos us \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \qquad (\because \cos ux \text{ は偶関数}) \\
&= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt
\end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t) \sin ut \, dt + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
&= \int_{\infty}^{0} f(-s) \sin u(-s) \, (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
&\qquad\qquad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \int_0^{\infty} f(-s) \sin(-us) \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
&= -\int_0^{\infty} f(s) \sin us \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \qquad (\because \sin ux \text{ は奇関数}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt\right)\cos ux\,du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt\right)\cos ux\,du
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt$$

とおけば、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty C(u)\cos ux\,du$$

が得られ、証明が完了する。 ■

系 3.4 奇関数 $f(x)$ の**フーリエ積分**は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty S(u)\sin ux\,du$$

である。ただし、

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt$$

とする。なお、$S(u)$ を**フーリエ正弦変換**と呼ぶ。

証明　偶関数と同様に証明する。定理 3.1 より、フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt\right)\cos ux\,du + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin ut\,dt\right)\sin ux\,du$$

である。ここで、関数 $f(x)$ が奇関数 $(f(-x) = -f(x))$ であることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt &= \int_{-\infty}^0 f(t)\cos ut\,dt + \int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt \\
&= \int_\infty^0 f(-s)\cos u(-s)\,(-ds) + \int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt \\
&\qquad\qquad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \int_0^\infty f(-s)\cos(-us)\,ds + \int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt \\
&= -\int_0^\infty f(s)\cos us\,ds + \int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt \qquad (\because \cos ux \text{ は偶関数}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。同様に、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\sin ut\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt \\
&= \int_{\infty}^{0} f(-s)\sin u(-s)\,(-ds) + \int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt \\
&\qquad\qquad (\because t=-s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \int_{0}^{\infty} f(-s)\sin(-us)\,ds + \int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} f(s)\sin us\,ds + \int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt \qquad (\because \sin ux \text{ は奇関数}) \\
&= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt
\end{aligned}
$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin ut\,dt\right)\sin ux\,du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin ut\,dt\right)\sin ux\,du
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin ut\,dt
$$

とおけば、

$$
f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} S(u)\sin ux\,du
$$

が得られ、証明が完了する。 ■

また、次のような系も得られます[5]。

系 3.5

(1) 関数 $f(x)$ が偶関数ならば、$C(u) = F(u)$ が成り立つ。

(2) 関数 $f(x)$ が奇関数ならば、$S(u) = iF(u)$ が成り立つ。

[5]関数 $F(u)$ を実部 (cos 波形) と虚部 (sin 波形) のベクトルで構成された波として捕らえれば、$F(u)$ に i を掛けることは、各ベクトルの位相を $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] だけ進ませることに他なりません。したがって、$F(u)$ が実部のみからなるベクトルの場合は、それ自身が実軸への像となり、$C(u)$ に一致します。一方、$F(u)$ が虚部のみからなるベクトルの場合は、位相を $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] だけ進ませ、これが実軸への像となり、$S(u)$ に一致します。

証明 (1) を証明する。

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iut}\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\infty}^{0} f(-s)e^{-iu(-s)}\,(-ds) + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \\
&\qquad\qquad (\because t=-s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} f(s)e^{ius}\,ds + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \qquad (\because f(-x)=f(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{iut}\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)(e^{iut}+e^{-iut})\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot\frac{e^{iut}+e^{-iut}}{2}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt = C(u)
\end{aligned}$$

$$\therefore C(u) = F(u).$$

(2) を証明する。

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iut}\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\infty}^{0} f(-s)e^{-iu(-s)}\,(-ds) + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \\
&\qquad\qquad (\because t=-s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} -f(s)e^{ius}\,ds + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \qquad (\because f(-x)=-f(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} -f(t)e^{iut}\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)(-e^{iut}+e^{-iut})\,dt = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot\frac{e^{iut}-e^{-iut}}{2i}\,dt \\
&= -i\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt = -i\cdot S(u)
\end{aligned}$$

$$\therefore S(u) = iF(u).$$

■

定理 3.1・系 3.3・系 3.4 をまとめると下表のようになります。

	フーリエ積分	フーリエ変換
関数	$f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux}\, du$	$F(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt$
偶関数	$f(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} C(u) \cos ux\, du$	$C(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut\, dt$
奇関数	$f(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} S(u) \sin ux\, du$	$S(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t) \sin ut\, dt$

表 3.1: フーリエ積分 (逆フーリエ変換) とフーリエ変換

例題 1 区間 $(-\infty,\infty)$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\le 1),\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

のフーリエ余弦変換を求めなさい。

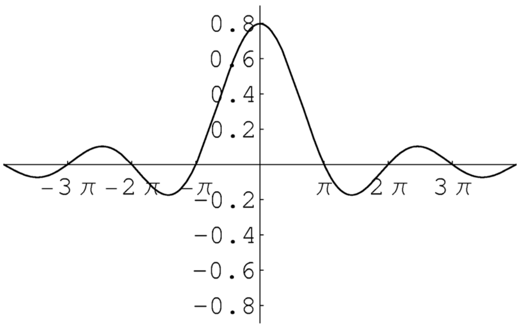
解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$\begin{aligned}C(u)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}1\cdot\cos ut\,dt\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin ut}{u}\right]_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin u}{u}\end{aligned}$$

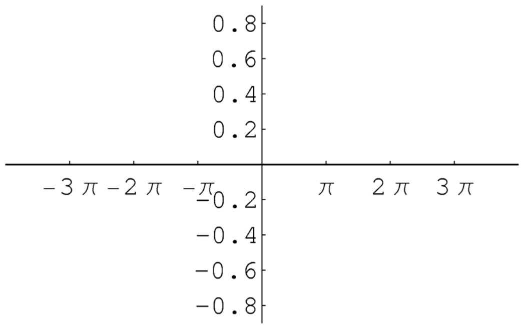
となる。

* 参考のため、関数 $C(u)$ の実部 $\mathrm{Re}\,C(u)$, 虚部 $\mathrm{Im}\,C(u)$, 振幅の絶対値 $|C(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます。

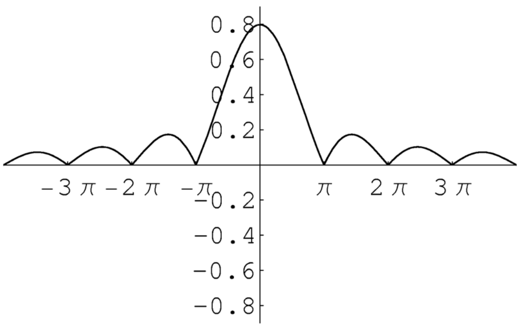
$\mathrm{Re}\,C(u)$



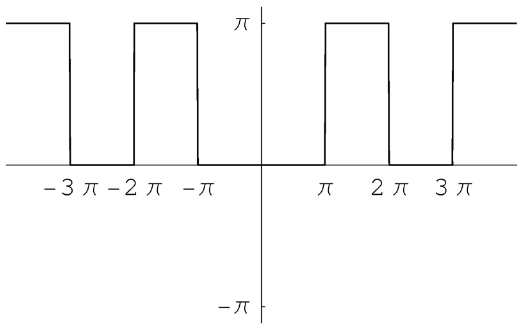
$\mathrm{Im}\,C(u)$



$|C(u)|$



θ



例題 2　区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -1), \\ -1 & (-1 < x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (0 < x < 1), \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

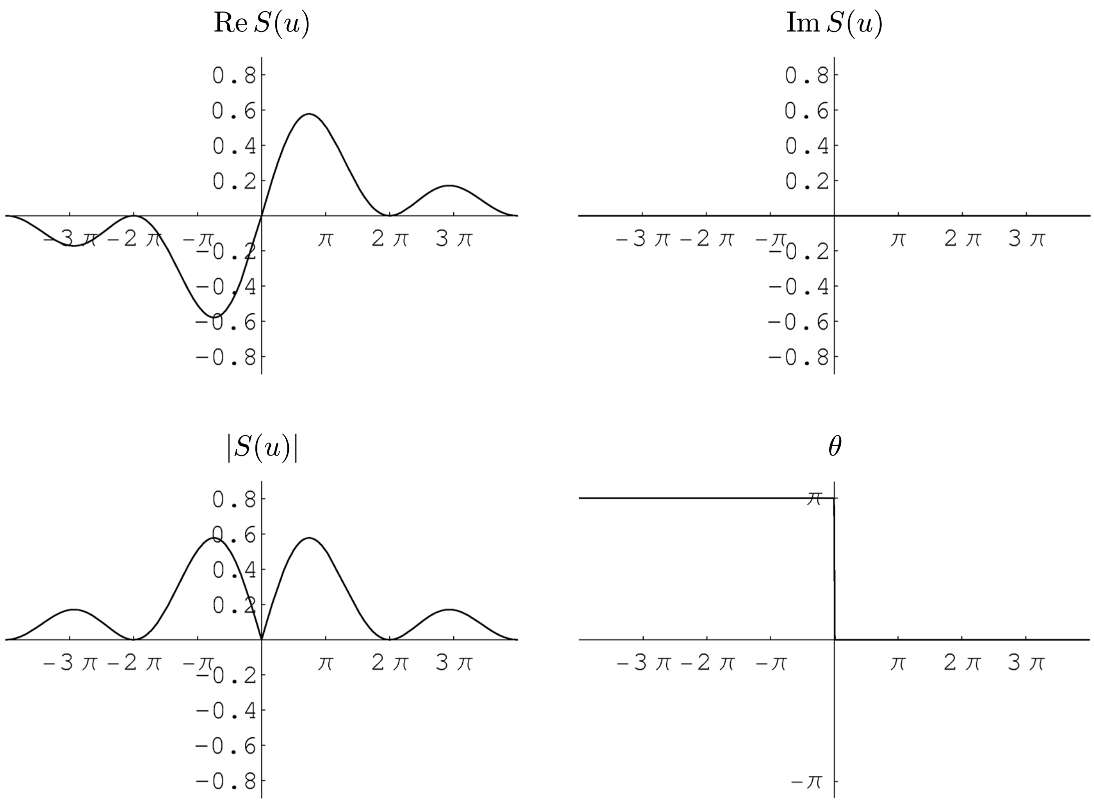
のフーリエ正弦変換を求めなさい。

解答例　関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換 $S(u)$ は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \sin ut\, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{-\cos ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos u}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $S(u)$ の実部 $\mathrm{Re}\, S(u)$, 虚部 $\mathrm{Im}\, S(u)$, 振幅の絶対値 $|S(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます。



例題 3　区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 2), \\ 1 & (2 \leq x \leq 3), \\ 0 & (x > 3) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めなさい。

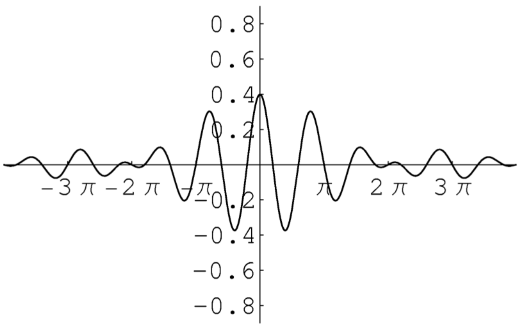
解答例　関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2}^{3} 1 \cdot e^{-iut}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iut}}{-iu} \right]_2^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(e^{-i3u} - e^{-i2u})}{u}$$

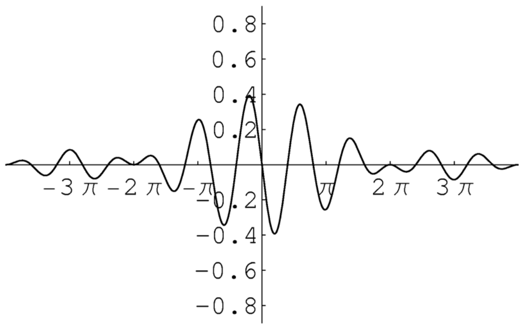
となる。

* 参考のため、関数 $F(u)$ の実部 $\mathrm{Re}\, F(u)$, 虚部 $\mathrm{Im}\, F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます。

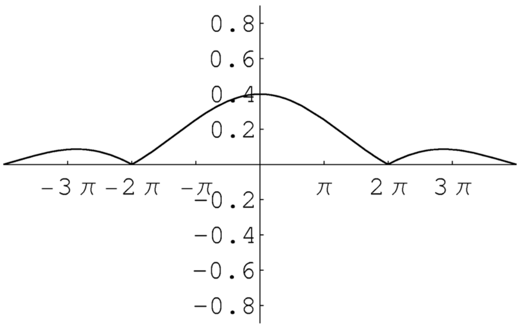
$\mathrm{Re}\, F(u)$



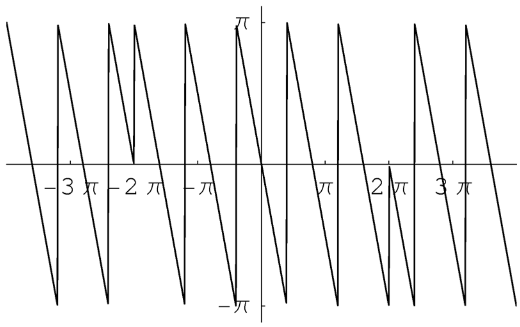
$\mathrm{Im}\, F(u)$



$|F(u)|$



θ



3.2　フーリエ積分の収束

フーリエ積分の収束についてもフーリエ級数の収束と同様に次の定理が成り立ちます。

定理 3.6 関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に連続かつ区分的になめらかで、さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M < \infty$$

を満たしているとき、関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

- $f(x)$ が連続な点 x で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ が不連続な点 x で $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に収束

する。

証明　フーリエ級数の収束の場合とほとんど同じなので、証明は省略します。 ■

上の定理より、次の系が直ちに得られます。

系 3.7 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(u)$ とすると、等式

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux}\, du$$

が成り立つ。

ここで、関数 $f(x)$ をフーリエ変換 $F(u)$ し、さらに、逆フーリエ変換することを考えてみましょう。前節で挙げた例で試してみると、関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \le x \le 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu}-1)}{u}$$

でしたから、逆フーリエ変換 $f(x)$ は、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu}-1)}{u} \right) e^{iux}\, du$$

を解けばよいことがわかります。しかしながら、これを直接解くことは非常に困難です。ところが、定理 3.6 に注意すれば、フーリエ積分によって得られた $f(x)$ は、不連続な点以外では元の関

数 $f(x)$ に一致することから、不連続な点のみ系 3.7 を使って値を修正すれば、逆フーリエ変換 $f(x)$ を容易に得ることができます。具体的には、例の場合、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu}-1)}{u} \right) e^{iux}\, du = \begin{cases} 0 & (x<0), \\ \frac{1}{2} & (x=0), \\ 1 & (0<x<1), \\ \frac{1}{2} & (x=1), \\ 0 & (x>1) \end{cases}$$

とすればよいことがわかります $\left(\because \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \right)$。

例題 1　区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

のフーリエ余弦変換を利用して、定積分

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\, du$$

の値を求めなさい。

解答例　関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1} 1 \cdot \cos ut\, dt$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u}$$

であるから、逆フーリエ余弦変換 $f(x)$ は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux\, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\, du$$

となる。したがって、系 3.7 より、以下のように定積分の値が求まる。

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\, du = \begin{cases} 1 & (|x| < 1), \\ \frac{1}{2} & (|x| = 1), \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

例題 2　次の方程式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$$\int_0^\infty f(x)\cos xt\,dt = \begin{cases} 1-x & (0 \le x \le 1), \\ 0 & (x > 1). \end{cases}$$

解答例　関数 $f(x)$ を偶関数と考えて、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-u) & (0 \le u \le 1), \\ 0 & (u > 1) \end{cases}$$

とおく (フーリエ余弦変換が与えられている)。このとき、逆フーリエ余弦変換は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty C(u)\cos ux\,du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-u)\right)\cos ux\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-u)\cos ux\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[(1-u)\frac{\sin ux}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\cdot\frac{\sin ux}{x}\,du\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{x}\int_0^1 \sin ux\,du\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x}\left[\frac{-\cos ux}{x}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} \end{aligned}$$

となる。また、$C(u)$ の不連続な全ての点 u で $C(u) = C(u+0) = C(u-0)$ が成り立ち、逆フーリエ余弦変換と求める関数 $f(x)$ は一致する。したがって、

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

となる。

* フーリエ積分 (逆フーリエ変換) とフーリエ変換は対称的な式であることから、フーリエ積分の収束と同様に、フーリエ変換の収束について

$$\frac{F(u+0)+F(u-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}\,dt$$

が成り立ちます (もちろん、同じ条件を与えた上で)。

例題 3 等式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2}\,du = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

が成り立つことを証明しなさい。

解答例 奇関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

とする。このとき、関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin t \sin ut\,dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi -\frac{1}{2}\left(\cos(t+ut) - \cos(t-ut)\right)\,dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \left(\cos(1+u)t - \cos(1-u)t\right)\,dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1+u)t}{1+u} - \frac{\sin(1-u)t}{1-u}\right]_0^\pi \\ &\quad\vdots \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin \pi u}{1-u^2} \end{aligned}$$

となる。さらに、関数 $f(x)$ の逆フーリエ正弦変換を求めると、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty S(u)\sin ux\,du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin \pi u}{1-u^2}\right)\sin ux\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2}\,du \end{aligned}$$

となる。また、$f(x)$ の不連続な全ての点 x で $f(x) = f(x+0) = f(x-0)$ が成り立ち、逆フーリエ正弦変換と元の関数 $f(x)$ は一致する。ゆえに、等式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2}\,du = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

が成り立つ。 ■