

3.3 波のフーリエ変換

この節では、波 (信号値; 観測値) $x(t)$ のフーリエ変換を導き、フーリエ変換の持つ意味や利点について考察しましょう。

まず、定理 3.2 の数学的なフーリエ積分およびフーリエ変換より、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) e^{iux} du$$

でしたから、 $f(x)$ を $x(s)$ (x も s [秒] に書き換える) に書き換え、 u を角速度 ω [rad/秒] に書き換えて整頓すると、

$$x(s) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega s} d\omega$$

となります。ここで、角速度 ω [rad/秒] は、周波数 f [Hz] を使って、

$$\omega = 2\pi f \quad (d\omega = 2\pi df)$$

と表せたので、さらに与式を変数変換すると、

$$x(s) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right) e^{i2\pi fs} df$$

となります。したがって、

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

とおくと、波 $x(t)$ のフーリエ積分 (s [秒] を t [秒] に書き換える)

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

が得られます。以上をまとめると、**波のフーリエ積分**および**波のフーリエ変換**は、

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (\text{波のフーリエ積分})$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{波のフーリエ変換})$$

となります。すなわち、この2つの式によって**時間領域** $x(t)$ と**周波数領域** $X(f)$ を自由に行き来することが可能となります。特に、波 $x(t)$ のフーリエ変換では、波 $x(t)$ の特徴を明確に捉えることを可能にします。具体的には、**波を構成する三角関数とその周波数 (角速度)・振幅・初期位相がわかります** (このあとに、例を使って示します)。なお、調べたい区間 (波の一部または全体) を積分区間としてフーリエ変換することで、調べたい区間の波の特徴を調べることができます。例えば、図 3.3 のように観測開始 ($t = 0$ [秒]) から観測終了 ($t = T'$ [秒]) までに波 $x(t)$ が得られたとすると、区間 $[0, T']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば観測区間全体の波の特徴を調べることができますし、 a [秒] から b [秒] までの区間を切り取り、区間 $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq T'$) を積分区間としてフーリエ変換すれば区間 $[a, b]$ の波の特徴を調べることができます ($T'' = b - a$)。ま

た、図 3.4 のような周期を持つ波の特徴を調べるには、1 周期 T''' [秒] 分、すなわち区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば周期を持つ波の特徴を調べることができます⁶。

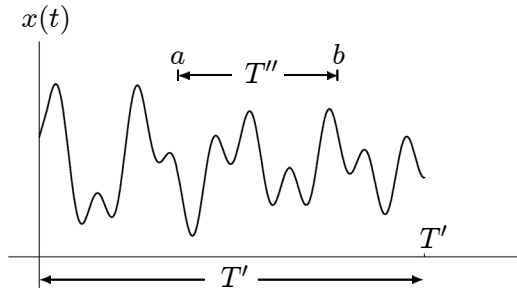


図 3.3: 一般的な波

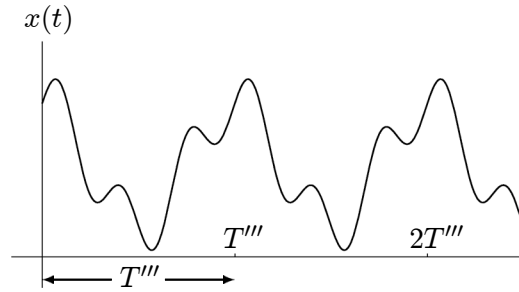


図 3.4: 周期を持つ波

ただし、ここで注意しておかなければならないことは、前記のように周期 T_0 [秒] (T' , T'' , T''' など) を持つ波 $x(t)$ として捉えたとき、区間 $[0, T_0]$ を積分区間としてフーリエ変換 $X(f)$ すると、各周波数ごとの振幅 (スペクトル⁷) は T_0 [秒] 間分を積算した振幅となってしまうことです。そこで、新たに**周波数スペクトル密度**

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (\text{周波数スペクトル密度})$$

を定義し、単位時間 (1 [秒]) あたりのスペクトルとして波の特徴を調べることにします⁸。

3.3.1 cos 波形の波のフーリエ変換

では、最も基本的な cos 波形の波

$$x(t) = A \cos 2\pi t$$

⁶周期を持つ波 $x(t)$ の場合、全区間を積分区間としてフーリエ変換すると無限大になり、まともに計算することができません。しかしながら、周期 T''' に限定し、区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば、フーリエ変換の条件

$$\int_0^{T'''} |x(t)| dt = M < \infty$$

を満たし、有限の値が得られます。なお、周期を持つ波を区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換し、波の特徴を調べ、三角関数で表すと、全区間に拡張された周期を持つ波として再現されます (フーリエ積分してしまうと元の 1 周期 T''' 分の波しか現れない)。実は、この再現された波 (周期関数) は、当然ではあるが、周期 T''' の周期関数をフーリエ級数展開して得られるフーリエ級数と一致します (元々、フーリエ級数を拡張したものがフーリエ積分であった)。逆に、前者を周期 T' または周期 T'' を持つ波として捉えて、フーリエ変換し、波の特徴を調べ、三角関数で表すと、それぞれ周期 T' または周期 T'' を持つ波として再現されます (時間領域の全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張される)。ただし、この場合の有効範囲 (区間) は、それぞれ区間 $[0, T']$ または区間 $[a, b]$ となります。

⁷フーリエ解析では、スペクトル (spectrum) は周波数ごとの振幅の大きさ指します。

⁸フーリエ積分する際は、元の $X(f)$ を使用します。

をフーリエ変換してみましょう。この波⁹は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 (A \cos 2\pi t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos u) e^{-ifu} du \quad (\because u = 2\pi t \text{ とおき、変数変換}) \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\cos u) e^{-ifu} du &= (\sin u) e^{-ifu} - \int (\sin u) \cdot (-if) e^{-ifu} du \\ &= (\sin u) e^{-ifu} + if \int (\sin u) e^{-ifu} du \\ &= (\sin u) e^{-ifu} + if \left((-\cos u) e^{-ifu} - \int (-\cos u) \cdot (-if) e^{-ifu} du \right) \\ &= (\sin u) e^{-ifu} + if \left((-\cos u) e^{-ifu} - if \int (\cos u) e^{-ifu} du \right) \\ &= (\sin u) e^{-ifu} - if (\cos u) e^{-ifu} - (if)^2 \int (\cos u) e^{-ifu} du \end{aligned}$$

より、

$$\int (\cos u) e^{-ifu} du = \frac{1}{1-f^2} \left((\sin u) e^{-ifu} - if (\cos u) e^{-ifu} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{1}{1-f^2} \left((\sin u) e^{-ifu} - if (\cos u) e^{-ifu} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{(0 - if e^{-i2\pi f}) - (0 - if)}{1-f^2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1-f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1-f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.5 のようになります。

⁹ この波を特徴付けるパラメータは、振幅 A 、角速度 $\omega = 2\pi$ [rad/秒]、初期位相 $\phi = 0$ [rad]、周期 $T_0 = 1$ [秒]、周波数 $f_0 = 1/T_0 = 1$ [Hz] となっています。併せて、以下の関係式を復習しておきましょう。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

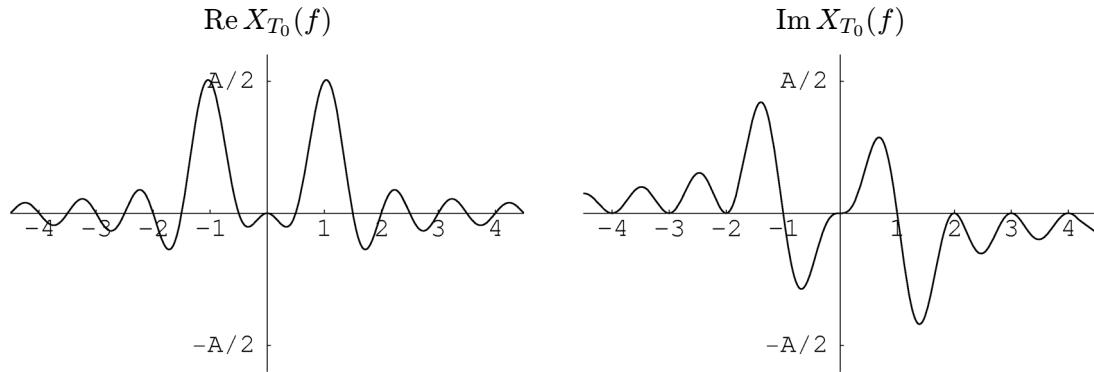


図 3.5: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = A \cos 2\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 1 を除く $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 1) = \pm 2\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています ($\cos$ 波形の波は $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフに現れる)。なお、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の値は、 $X_{T_0}(f)$ の極限が $\frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{i(1 - e^{-i2\pi f}) + if(-(-i2\pi)e^{-i2\pi f})}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \frac{A}{2} \quad \leftarrow \text{極座標表示による } \cos \text{ 波形の波は実部のみ} \end{aligned}$$

となります。したがって、 $\cos$ 波形の波が初期位相 0 [rad] であることに注意し、

$$A \cos \theta = A \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{A}{2} e^{i\theta} + \frac{A}{2} e^{i(-\theta)} \quad (\theta = 0 \text{ とする})$$

と考えれば ($\cos$ 波形の波の振幅を求める公式: $\text{Re } X_{T_0}(f) + \text{Re } X_{T_0}(-f)$)、

$$\text{Re } X_{T_0}(1) + \text{Re } X_{T_0}(-1) = \text{Re} \left(\frac{A}{2} \right) + \text{Re} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$$

が振幅となります。以上より、元の関数

$$x(t) = A \cos 2\pi t$$

が導き出されます¹⁰。

¹⁰ここでは、初期位相について何も触れていませんが、この後の初期位相を持つ波のフーリエ変換で詳しく述べることにします。また、このような考察は、実は、周期 1 [秒] を持つ波 $x(t)$ のフーリエ級数を求めていることに他なりません。事実、フーリエ係数 $a_2 = A$ かつそれ以外のフーリエ係数が 0 となるフーリエ級数となっています。なお、波 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ をフーリエ積分してしまうと 1 周期分の $\cos$ 波形の波しか現れないことに注意しましょう。

3.3.2 sin 波形の波のフーリエ変換

続いて、cos 波形の波のフーリエ変換に習って、最も基本的な sin 波形の波

$$x(t) = B \sin 2\pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。この波は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 (B \sin 2\pi t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin u) e^{-ifu} du \quad (\because u = 2\pi t \text{ とおき、変数変換}) \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\sin u) e^{-ifu} du &= (-\cos u) e^{-ifu} - \int (-\cos u) \cdot (-if) e^{-ifu} du \\ &= (-\cos u) e^{-ifu} - if \int (\cos u) e^{-ifu} du \\ &= (-\cos u) e^{-ifu} - if \left((\sin u) e^{-ifu} - \int (\sin u) \cdot (-if) e^{-ifu} du \right) \\ &= (-\cos u) e^{-ifu} - if \left((\sin u) e^{-ifu} + if \int (\sin u) e^{-ifu} du \right) \\ &= (-\cos u) e^{-ifu} - if (\sin u) e^{-ifu} - (if)^2 \int (\sin u) e^{-ifu} du \end{aligned}$$

より、

$$\int (\sin u) e^{-ifu} du = \frac{1}{1-f^2} \left((-\cos u) e^{-ifu} - if (\sin u) e^{-ifu} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{B}{2\pi} \left[\frac{1}{1-f^2} \left((-\cos u) e^{-ifu} - if (\sin u) e^{-ifu} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{(-e^{-i2\pi f} + 0) - (-1 + 0)}{1-f^2} \\ &= \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1-f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1-f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.6 のようになります。

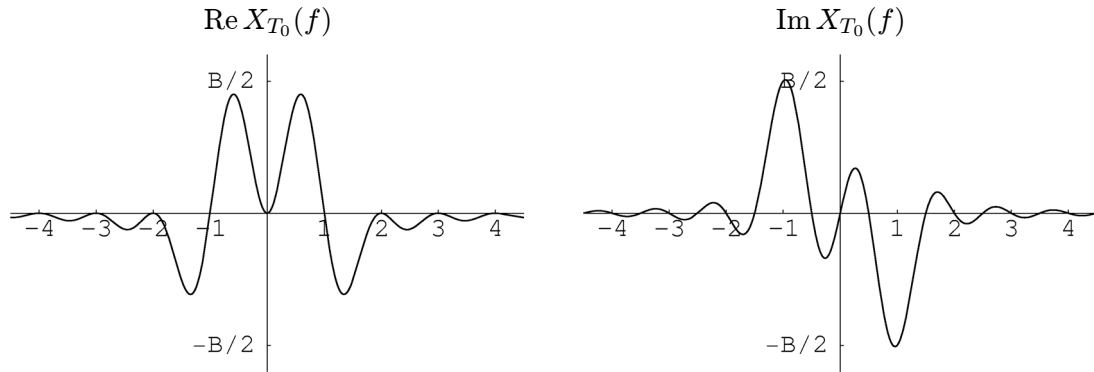


図 3.6: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = B \sin 2\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 1 を除く $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 1) = \pm 2\pi$ [rad/秒] の $\sin$ 波形の波から構成されていることを表しています ([sin 波形の波は \$\text{Im } X_{T_0}\(f\)\$ のグラフに現れる](#))。なお、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の値は、 $X_{T_0}(f)$ の極限が $\frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{-(-i2\pi)e^{-i2\pi f}}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \mp i \frac{B}{2} \quad (\text{符号同順}) \quad \leftarrow \text{極座標表示による sin 波形の波は虚部のみ} \end{aligned}$$

となります。したがって、[sin 波形の波が初期位相 \$-\frac{\pi}{2}\$ \[rad\] であることに注意し、](#)

$$B \sin \theta = B \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{B}{2} e^{i\theta} + i \frac{B}{2} e^{i(-\theta)} \quad (\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ とする})$$

と考えれば ([sin 波形の波の振幅を求める公式: \$-\text{Im } X_{T_0}\(f\) + \text{Im } X_{T_0}\(-f\)\$](#))、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -\text{Im} \left(-i \frac{B}{2} \right) + \text{Im} \left(i \frac{B}{2} \right) = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = B$$

が振幅となります。以上より、元の関数

$$x(t) = B \sin 2\pi t$$

が導き出されます¹¹。

¹¹ここでも、初期位相について何も触れていませんが、この後の初期位相を持つ波のフーリエ変換で詳しく述べることにします。また、 $\cos$ 波形の波のフーリエ変換と同様に、このような考察は、周期 1 [秒] を持つ波 $x(t)$ のフーリエ級数を求めていることに他なりません。事実、フーリエ係数 $b_2 = B$ かつそれ以外のフーリエ係数が 0 となるフーリエ級数となっています。同じことですが、波 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ をフーリエ積分してしまうと 1 周期分の $\sin$ 波形の波しか現れないことに再び注意しましょう。

3.3.3 周期 T_0 を持つ波のフーリエ変換

これまでの波は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波でしたが、周期を変えた波のフーリエ変換では、どのような違いがあるのか検証しましょう。例えば、周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos \pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。この波を区間 $[0, 2]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^2 (\cos \pi t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.7 のようになります。

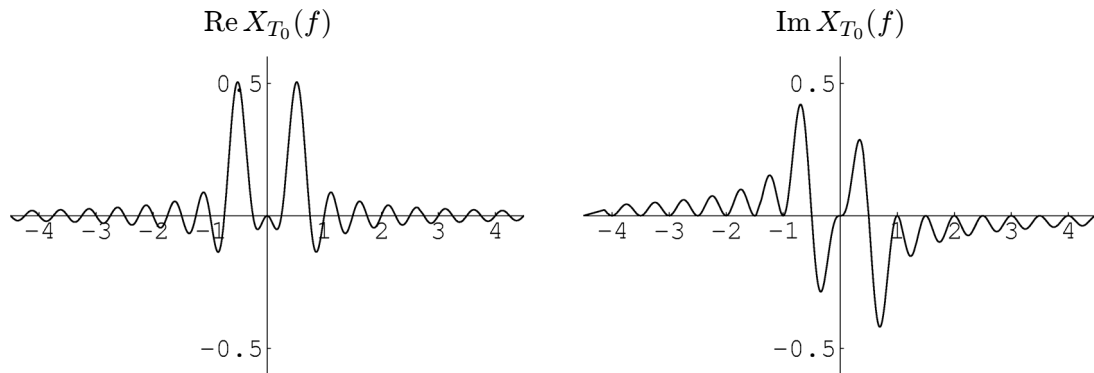


図 3.7: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos \pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 0.5 を除く $0, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 0.5) = \pm \pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています（**角速度が半分になる**）。なお、振幅は $\cos$ 波形の波のフーリエ変換に習って求めると 1 となります。したがって、元の関数

$$x(t) = \cos \pi t$$

が導き出されます。

理解を深めるために、周期 $T_0 = \frac{1}{2} = 0.5$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

もフーリエ変換してみましょう。この波を区間 $[0, \frac{1}{2}]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\cos 4\pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i(f/2) \cdot (1 - e^{-i2\pi(f/2)})}{1 - (f/2)^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(f/2) \cdot (1 - e^{-i2\pi(f/2)})}{1 - (f/2)^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.8 のようになります。

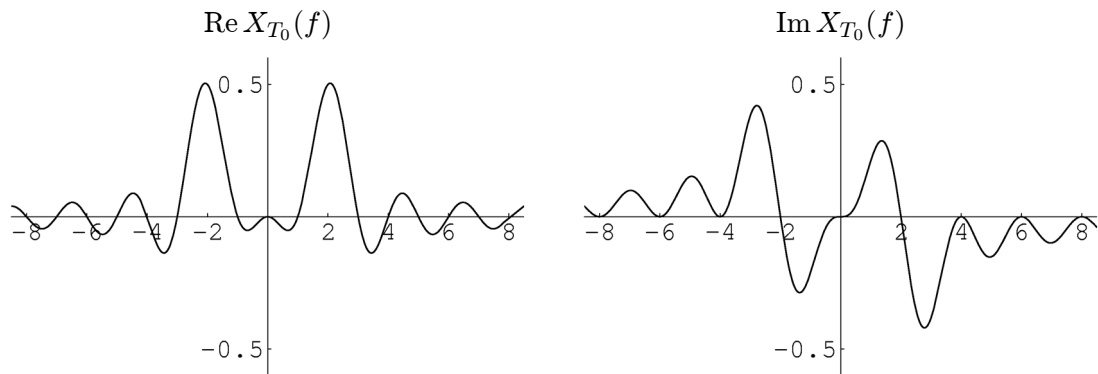


図 3.8: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos 4\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 2 を除く $0, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 2) = \pm 4\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています (角速度が 2 倍になる)。なお、振幅は $\cos$ 波形の波のフーリエ変換に習って求めると 1 となります。したがって、元の関数

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

が導き出されます。

この2つの例を $\cos$ 波形の波 $x(t) = A \cos 2\pi t$ と比較すると、2つの例の周波数スペクトル密度のグラフは、 $\cos$ 波形の波 $x(t) = A \cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフを横軸に $\frac{1}{T_0}$ 倍したグラフに他ならないことがわかります。したがって、ある波に対して、フーリエ変換の対象となる区間 (調べたい区間; 周期) T_0 [秒] が与えられると、その波の基準となる周波数 $f_0 = \frac{1}{T_0}$ [Hz] が決まります。すなわち、 nf_0 [Hz] ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) について調べれば、ある波の特徴を十分に捉えることができるわけです。この事実は非常に重要で、第4章の高速フーリエ変換 (離散フーリエ変換; デジタルフーリエ変換) のサンプリングや分解能といった言葉の直接の概念を指しています。大げさですが、離散という言葉の要であるといっても過言ではないでしょう。

3.3.4 合成された波のフーリエ変換

これまで、個々の三角関数 (波) のフーリエ変換を見てきました。この節では、複数の三角関数の1次結合によって合成された波のフーリエ変換について考察しましょう (これがフーリエ変換の最大の特徴と言ってもよい)。例として、図3.9の周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。

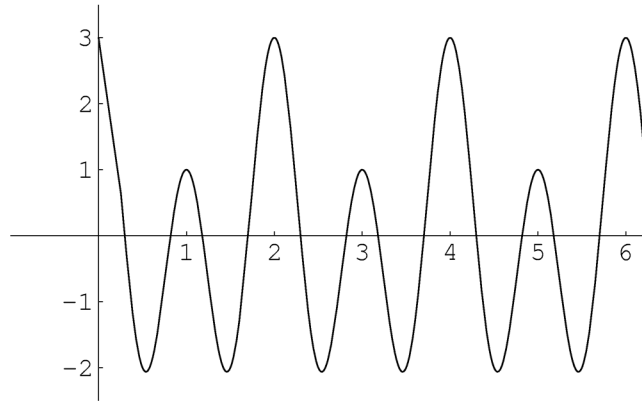


図 3.9: 合成された波のグラフ ($x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$)

この波を区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^2 (\cos \pi t + 2 \cos 2\pi t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} + 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if \cdot (1 - e^{-i4\pi f})}{1 - f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} + \frac{if \cdot (1 - e^{-i4\pi f})}{1 - f^2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.10 のようになります。

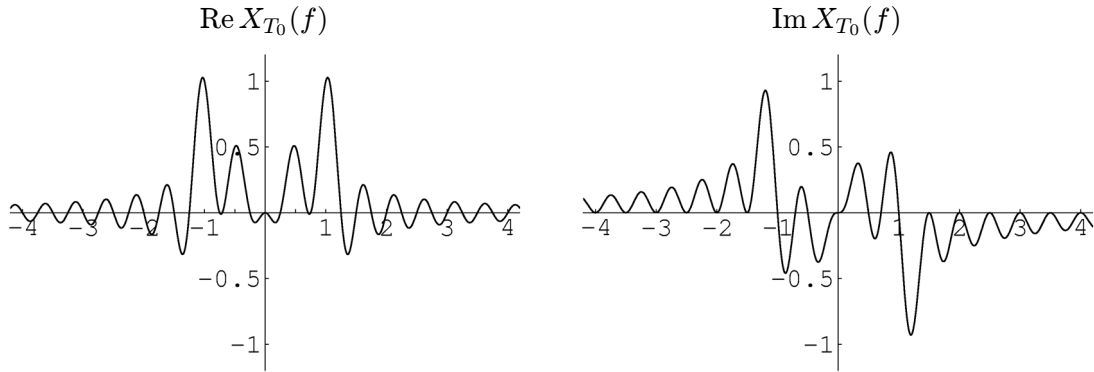


図 3.10: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$)

ここで、波 $x(t)$ の特徴を調べるために、各周波数の $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および $\text{Im } X_{T_0}(f)$ の値を求めましょう。なお、前節の考察から、基準となる周波数を $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] として各周波数 nf_0 ($n = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$) について調べれば十分です。グラフを読むと、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ では、周波数 f [Hz] が $\pm 0.5, \pm 1$ を除く $0, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ では、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f_1 = \pm 0.5$ および $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega_1 = \pi$ および $\omega_2 = 2\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています (**周波数ごとに異なった三角関数の波となる**)。詳しい計算は省略しますが、それぞれ振幅 1 および 2 が求まり、元の関数

$$x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$$

が求められます。なお、①式の前項が $\cos \pi t$ をフーリエ変換した式であり、次項が $\cos 2\pi t$ をフーリエ変換した式であることを利用すれば比較的楽に計算できます。このことは、波 $\cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフが、波 $\cos \pi t$ と波 $\cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフを重ね合わせたものとなっていることでも確認できます。

以上の考察から、フーリエ変換によって、波を構成する三角関数を知ることができます。言い換えれば、フーリエ変換は、波を三角関数に分離することを可能にします。このテキストでは三角関数しかフーリエ変換しませんでした。もちろん、(周期を持たない) 一般の関数をフーリエ変換することができます。これは、つまり、一般の関数が三角関数の重ね合わせとして表せることを意味しています。すなわち、一般の関数のフーリエ級数が得られることになります。この利点を活かして、現代社会では、フーリエ変換の理論が様々なところで使われています。特に、コンピュータの登場によって、第 4 章で学ぶ離散フーリエ変換は活躍の場を更に広げています。