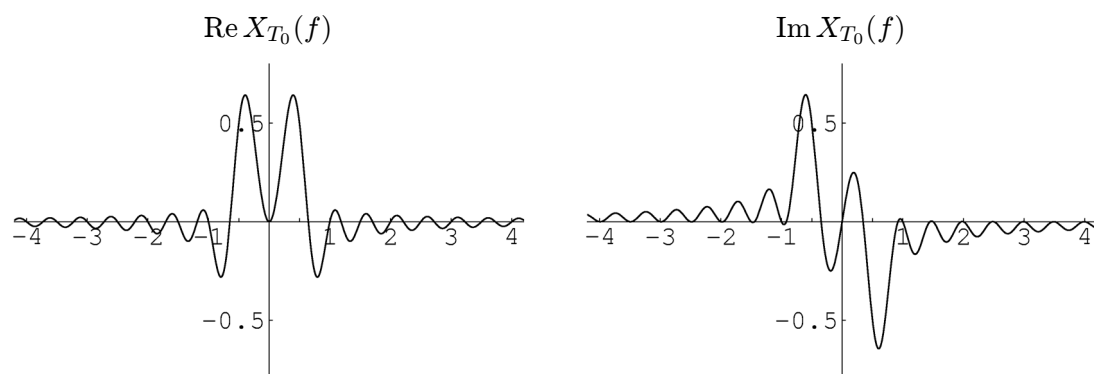


例題 1 周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 2]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	∓ 0.5	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 2$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] である。したがって、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm \pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\cos$ 波形の波を含み、その振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(0.5) + \text{Re } X_{T_0}(-0.5) = 0.5 + 0.5 = 1$$

となる。同様に、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm \pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、その振幅は、

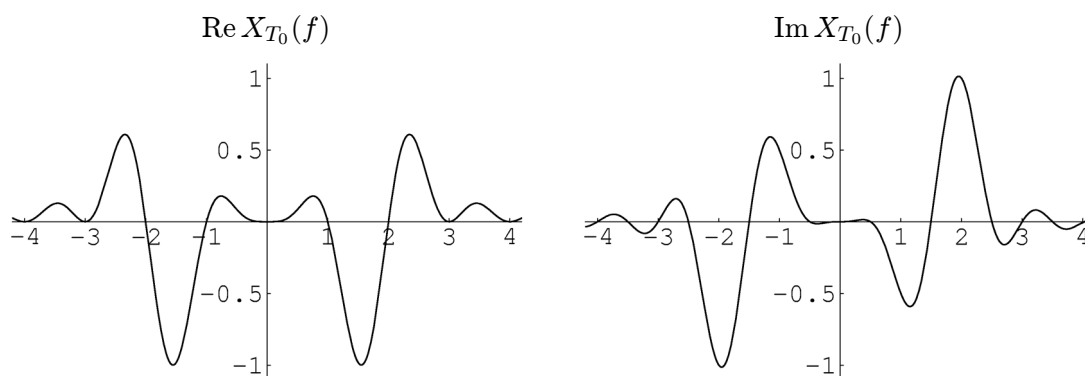
$$-\text{Im } X_{T_0}(0.5) + \text{Im } X_{T_0}(-0.5) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos \pi t + \sin \pi t$$

である。

例題 2 周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	$\frac{4}{15\pi}$	0	$-\frac{108}{35\pi}$	0	$\frac{100}{63\pi}$	0	$\frac{196}{495\pi}$	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	0	∓ 0.5	0	± 1	0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。したがって、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で $\text{Re } X_{T_0}(f) = 0$ であるから、ある波には $\cos$ 波形の波は含まれない。また、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 1$ [Hz] および $f_4 = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi \text{ [rad/秒]}$$

および

$$\omega_4 = 2\pi f_4 = \pm 4\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、これらの振幅は、それぞれ

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

および

$$-\text{Im } X_{T_0}(2) + \text{Im } X_{T_0}(-2) = -1 \cdot 1 + (-1) = -2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \sin 2\pi t - 2 \sin 4\pi t$$

である。

3.3.5 初期位相を持つ波のフーリエ変換

これまで、初期位相 ϕ [rad] が 0 となるように $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波を個別に考えてきましたが、波の世界では、角速度 ω [rad/秒] ごとに、 $\cos$ 波形の波

$$C \cos(\omega t + \phi) \quad (C > 0)$$

の形式で表すことになっていました¹²。実際、

$$\begin{aligned} C \cos(\omega t + \phi) &= C(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \\ &= (C \cos \phi) \cos \omega t + (-C \sin \phi) \sin \omega t \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \end{aligned}$$

(ただし、 $A = C \cos \phi$ および $B = -C \sin \phi$ とする)

のように、初期位相が 0 の $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波で表すことができます。この節では、これまで個別に扱ってきた $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波を合成して、波の世界の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ で表すことと、そのフーリエ変換について考えましょう。

例として、波 $C \cos 2\pi t$ を 0.125 [秒] 進ませた波、すなわち、初期位相 $\phi = \frac{\pi}{4}$ [rad] の波

$$x(t) = C \cos(2\pi(t + 0.125)) = C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

のフーリエ変換について考察しましょう。なお、

$$C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t \quad \dots \textcircled{1}$$

となることに注意しておきましょう。この波は周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^1 C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t dt - \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t dt \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \end{aligned}$$

¹²話の都合上、振幅の記号に C を用いました。なお、 $\sin$ 波形の波 $C \sin(\omega t + \phi)$ は、 $C \cos(\omega t + (\phi - \pi/2))$ と書き直せ、 $-C \cos(\omega t + \phi)$ は、 $C \cos(\omega t + (\phi - \pi))$ と書き直せるため、基本的な波は、全て振幅 $C (> 0)$ の $\cos$ 波形の波 $C \cos(\omega t + \phi)$ の形式で表すことができます。

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.11 のようになります。

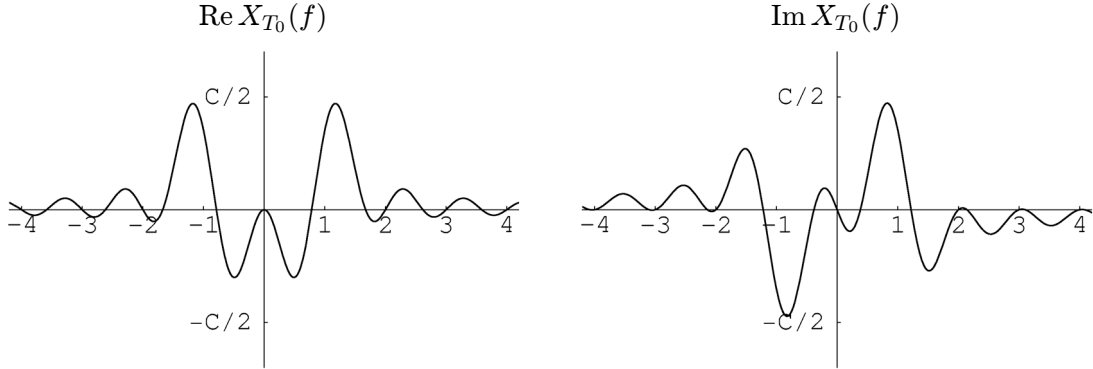


図 3.11: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = C \cos(2\pi t - \pi/4)$)

ここで、波 $x(t)$ の特徴を調べるために、各周波数の $X_{T_0}(f)$ ($\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$) の値を求めましょう。周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] となるので、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分です。グラフより、周波数 $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち、角速度 $\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi$ [rad/秒] の波によって構成されていることがわかります (それ以外の値は 0)。具体的に値を求めると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \right) \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} \\ &\quad - \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(1 - e^{-i2\pi f}) + if(-(-i2\pi)e^{-i2\pi f})}{-2f} \\ &\quad - \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(-i2\pi)e^{-i2\pi f}}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \left(\mp i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} C}{4} (1 \pm i) \quad (\text{符号同順}) \end{aligned}$$

となります。これまで通り、 $\cos$ 波形の波 $\cos 2\pi t$ および $\sin$ 波形の波 $\sin 2\pi t$ に分けて振幅を求めると、

$$\operatorname{Re} X_{T_0}(1) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-1) = \frac{\sqrt{2}C}{4} + \frac{\sqrt{2}C}{4} = \frac{\sqrt{2}C}{2}$$

および

$$-\operatorname{Im} X_{T_0}(1) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-1) = -\left(\frac{\sqrt{2}C}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}C}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}C}{2}$$

となり、元の波

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}C}{2} \cos 2\pi t + \left(-\frac{\sqrt{2}C}{2}\right) \sin 2\pi t$$

が求まります。もちろん、①式より、この波は、

$$x(t) = C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

と書き換えられ、元の波と一致していることがわかります。

波の世界の基本波形

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{ただし、}\omega = 2\pi f \text{ とする})$$

を

$$(\text{与式}) = C \frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} = \left(\frac{C}{2} e^{i\phi}\right) e^{i\omega t} + \left(\frac{C}{2} e^{-i\phi}\right) e^{-i\omega t}$$

と変形し、別の見方をしてみましょう。このとき、これまでの考察から、

$$\frac{C}{2} e^{i\phi} = X_{T_0}(f) \quad \text{および} \quad \frac{C}{2} e^{-i\phi} = X_{T_0}(-f) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかります。そこで、

$$\frac{C}{2} e^{i\phi} = \frac{C}{2} (\cos \phi + i \sin \phi) = X_{T_0}(f)$$

より、まず、初期位相

$$\phi = \arg\left(\frac{C}{2} e^{i\phi}\right) = \arg X_{T_0}(f) \quad (\text{同様に、}\phi = -\arg X_{T_0}(-f))$$

を求めます。求めた初期位相 ϕ [rad] を②式に代入すると振幅

$$C = \frac{2X_{T_0}(f)}{e^{i\phi}} \quad (\text{同様に、} C = \frac{2X_{T_0}(-f)}{e^{-i\phi}})$$

が求められます。さらに、

$$\begin{aligned} C &= \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = \frac{X_{T_0}(f)}{e^{i\phi}} + \frac{X_{T_0}(-f)}{e^{-i\phi}} \quad (\because \textcircled{2} \text{式を代入}) \\ &= \frac{e^{-i\phi} X_{T_0}(f) + e^{i\phi} X_{T_0}(-f)}{e^{i\phi} e^{-i\phi}} = e^{-i\phi} X_{T_0}(f) + e^{i\phi} X_{T_0}(-f) \\ &= \frac{2X_{T_0}(-f)}{C} X_{T_0}(f) + \frac{2X_{T_0}(f)}{C} X_{T_0}(-f) \quad (\because \textcircled{2} \text{式を代入}) \\ &= \frac{4}{C} X_{T_0}(f) X_{T_0}(-f) \end{aligned}$$

より、 $X_{T_0}(f)X_{T_0}(-f) = |X_{T_0}(f)|^2 = |X_{T_0}(-f)|^2$ に注意すると、

$$C^2 = 4X_{T_0}(f)X_{T_0}(-f) = 4|X_{T_0}(f)|^2$$

が成り立つことから、 $C > 0$ にも注意すれば、

$$C = 2|X_{T_0}(f)| = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(f)| = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(-f)|$$

という関係が得られます。以上の考察より、波 $x(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ をフーリエ変換して得られる周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ を使って、直接、

$$\text{振幅 } C = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(-f)|,$$

$$\text{初期位相 } \phi = \arg X_{T_0}(f)$$

を求めることもできます。例を使って確認してみると、それぞれ、

$$|X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = \left| \frac{\sqrt{2}C}{4}(1+i) \right| + \left| \frac{\sqrt{2}C}{4}(1-i) \right| = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg \left(\frac{\sqrt{2}C}{4}(1+i) \right) = \frac{\pi}{4}$$

のように、確かに振幅と初期位相が求められます。

この節の締めくくりとして、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ が複素フーリエ係数 c_n と一致することを述べておきます。この節の最初にも述べたように、波の世界の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ は、

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (A = C \cos \phi, B = -C \sin \phi)$$

と表せます。ここで、上式を次のように変形します。

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t &= A \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + B \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\ &= A \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - iB \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \frac{A - iB}{2} e^{i\omega t} + \frac{A + iB}{2} e^{-i\omega t} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

第 3.3.1 節および第 3.3.2 節で述べたように、 A と B は、それぞれ三角関数によるフーリエ級数の a_n と b_n に対応していることから、③式の前項は複素フーリエ係数の定義そのもので、 c_n に一致していることがわかります。同様に、③式の後項は複素フーリエ係数 c_{-n} に一致していることがわかります。さらに、②式と比較すると、 $X_{T_0}(f) = c_n$ および $X_{T_0}(-f) = c_{-n}$ となることがわかります。すなわち、周波数スペクトル密度を求めるということは、複素フーリエ級数展開を行なって複素フーリエ係数を求めていることに他ならないということです。

例題 1 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 1) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 $A (> 0)$, 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $A \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。

解答例 周波数 $f = \pm 1$ [Hz] より、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] である。また、振幅 A および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$A = |X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |1| + |1| = 1 + 1 = 2,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

である。したがって、ある波は、

$$x(t) = 2 \cos \left(2\pi t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

である。

* $|X_{T_0}(1)|$ と $|X_{T_0}(-1)|$ は、両方計算しなくても、片方計算すれば十分です。

例題 2 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 1$ および ± 3 [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 1) = 3$ および $X_{T_0}(\pm 3) = \mp i2$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 $A (> 0)$, 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $A \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。

解答例 周波数 $f = \pm 1$ [Hz] のとき、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] で、振幅 A および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$A = |X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = |3| + |3| = 3 + 3 = 6,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg(3 + i0) = 0$$

である。同様に、周波数 $f' = \pm 3$ [Hz] のとき、角速度 $\omega' = 2\pi f' = \pm 6\pi$ [rad/秒] で、振幅 A' および初期位相 ϕ' [rad] は、それぞれ、

$$A' = |X_{T_0}(3)| + |X_{T_0}(-3)| = |-i2| + |i2| = 2 + 2 = 4,$$

$$\phi' = \arg X_{T_0}(3) = \arg(0 - i2) = -\frac{\pi}{2}$$

である。以上より、ある波は、

$$x(t) = 6 \cos(2\pi t) + 2 \cos \left(6\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

である。