第4章　離散フーリエ変換

4.1　離散フーリエ変換

これまで、私たちは連続関数に対するフーリエ変換およびフーリエ積分 (逆フーリエ変換) について学んできました。この節では、フーリエ変換を**離散**化した**離散フーリエ変換**について学びましょう。

自然現象 (音声) などを観測して得られる波 (信号値; 観測値) は、通常、**連続**的な波 (電気信号) として観測機器から出力されます。しかしながら、コンピュータはこの様な連続的な波を直接扱うことができないため、図 4.1 のように変換器[1]を用いてこの波を一定間隔で**サンプリング**し、コンピュータが直接扱うことのできる**離散**的な数値列に変換して扱います (図 4.2 を参照のこと)。前者を**アナログ** (analog) と呼び、後者を**デジタル** (didital) と呼びます。

図 4.1: アナログからデジタルへ

[1]アナログ信号からデジタル信号に変換する装置を **A-D 変換器**と呼び、逆に、デジタル信号からアナログ信号に変換する装置を **D-A 変換器**と呼びます。

この離散的な数値列からフーリエ変換を用いて元の波の性質を調べるために、これまで学んだフーリエ変換を**離散フーリエ変換**に書き換えましょう。いま、図 4.2 のように観測開始 0 [秒] から観測終了 T_0 [秒] までに観測された波 $x(t)$ に対して、Δt [秒] の一定間隔でサンプリングされた N 個の離散的な数値列 (離散化された波) を

$$(\text{離散化された波}) = \{\ x(0),\ x(\Delta t),\ x(2\Delta t),\ x(3\Delta t),\ \cdots,\ x((N-2)\Delta t),\ x((N-1)\Delta t)\ \}$$

としましょう。

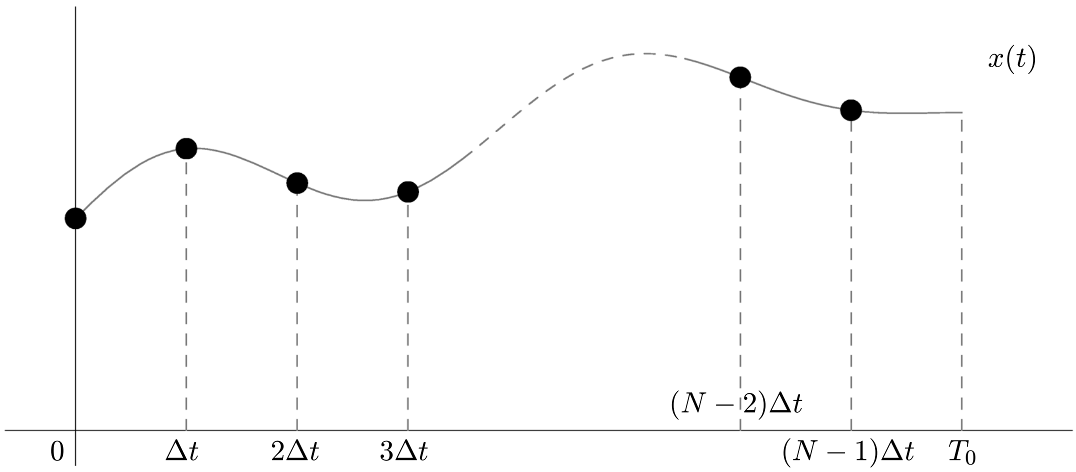

図 4.2: 離散化された波

この離散化された波を直接フーリエ変換 (積分) することはできないので、区分求積法 (リーマン和) を使って、近似されたフーリエ変換 $X(f)$ を求めます。指数関数 $e^{-i2\pi ft}$ を

$$\varphi(t) = e^{-i2\pi ft}$$

とおくと、近似されたフーリエ変換

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_0^{T_0} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \\ &\fallingdotseq x(0)\varphi(0)\Delta t + x(\Delta t)\varphi(\Delta t)\Delta t + x(2\Delta t)\varphi(2\Delta t)\Delta t + \cdots \\ &\qquad + x((N-1)\Delta t)\varphi((N-1)\Delta t)\Delta t \qquad (\because \text{区分求積法}) \end{aligned}$$

が得られます。さらに、関係式 (Δt は区間 $[0, T_0]$ を N 等分したもの)

$$\Delta t = \frac{T_0 - 0}{N} = \frac{T_0}{N}\ [\text{秒}] \qquad \cdots ①$$

を代入すると、近似されたフーリエ変換

$$X(f) \fallingdotseq \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\varphi(n\Delta t)$$

が得られます。

ここで、連続的な波と離散的な波の違いについて比較しましょう。そもそも、フーリエ変換は、ある波を三角関数の積み重ねによって表そうとするものでしたから、いま、ある連続的な波をフーリエ変換したものが、図 4.3 のような三角関数の総和で表されたとしましょう。例えば、これを 4 等分 $(N = 4)$ して離散的な波として捉え直してみましょう。

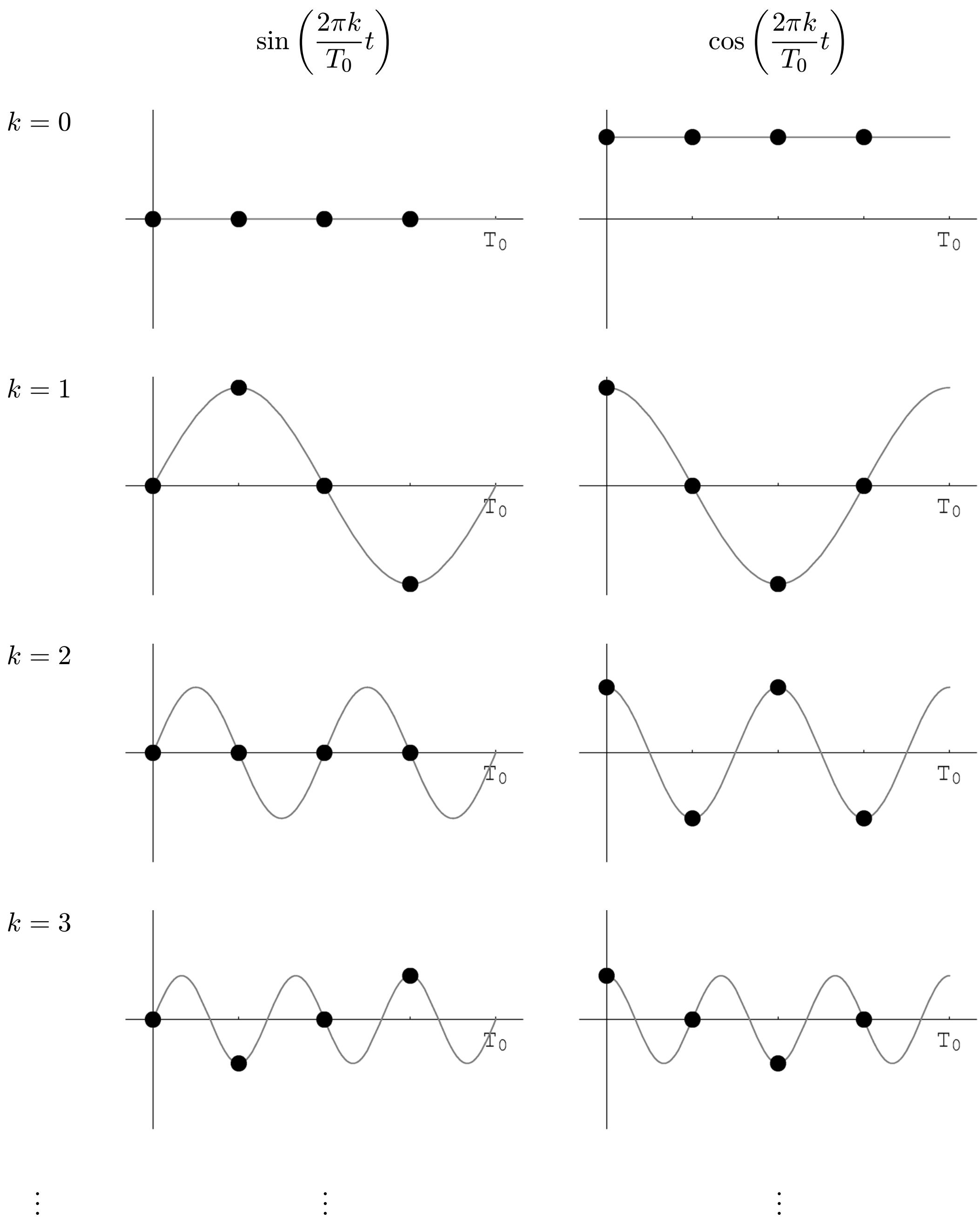

図 4.3: 離散化された波のフーリエ変換

図 4.3 のグラフを注意深く見てみると、$k=3$ のグラフは、図 4.4 のように $k=1$ のグラフとして解釈することができます (本来、赤線の波を青線の波として解釈することができる)。すなわち、離散化された波では、$k=3,4,\cdots$ の波は $k=0,1,2$ の波に吸収され、$k=0,1,2$ の三角関数のみで表せることを意味しています (逆に、離散化すると $k=0,1,2$ の三角関数でしか表せない)。

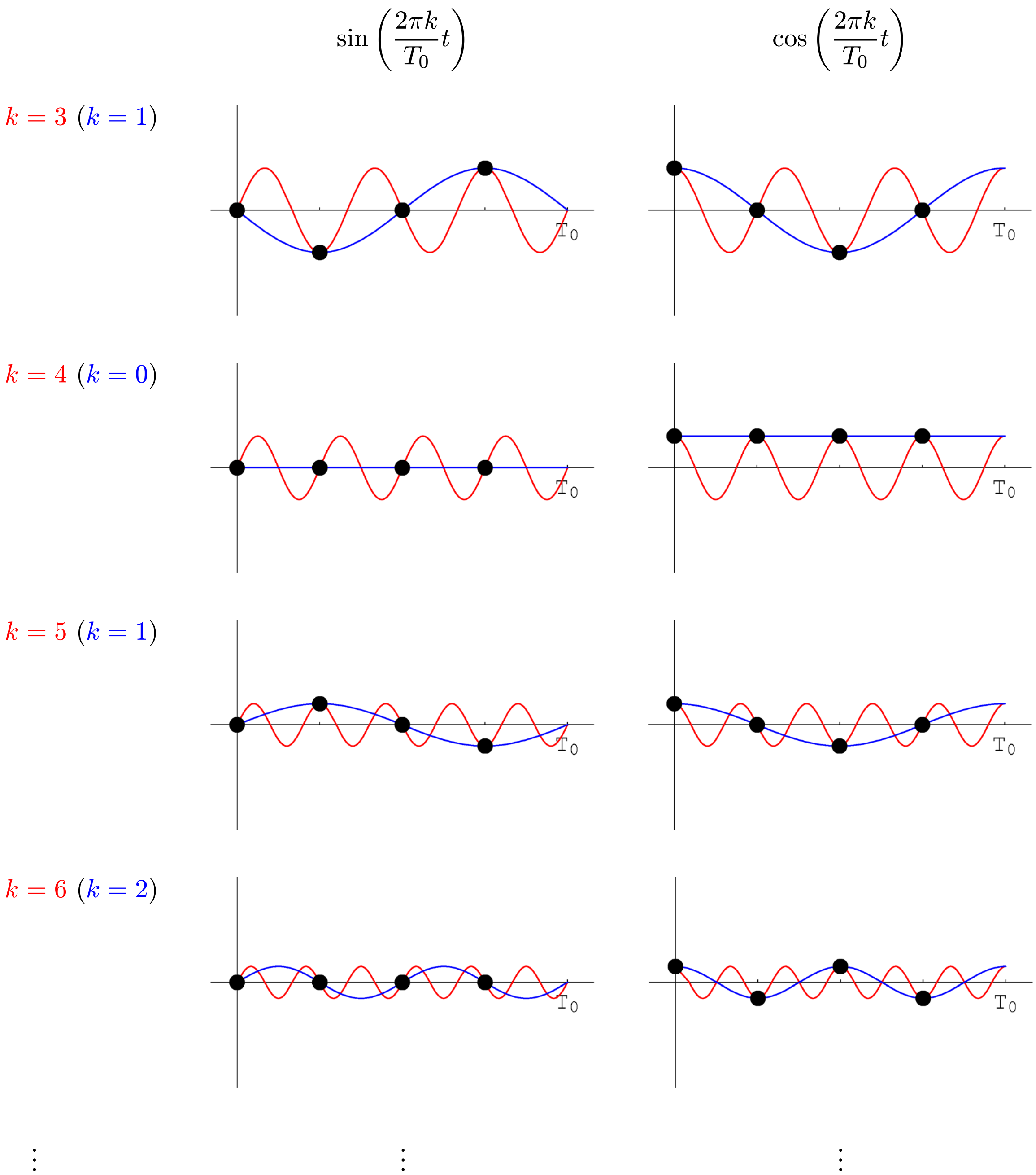

図 4.4: 離散化によって吸収される波

したがって、最大の周波数 $f_{\max}$ $(= f_s/2)$ [Hz] が求められます。$2\Delta t$ [秒] で 1 [回転] していることに注意すれば (例では $k = 2$ の場合)、最大の周波数 $f_{\max}$ は、

$$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t}\ [\mathrm{Hz}] \quad \left(f_s = \frac{1}{\Delta t}\ [\mathrm{Hz}]\right) \qquad \cdots②$$

となります。さらに、離散化されたある波の基準となる周波数 Δf [Hz] を

$$\Delta f = \frac{1}{T_0}\ [\mathrm{Hz}] \qquad \cdots③$$

とおき (3.3.3 節参照)、①式と③式を②式に代入すると、関係式

$$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2T_0} = \frac{N}{2}\Delta f\ [\mathrm{Hz}] \quad (f_s = N\Delta f\ [\mathrm{Hz}])$$

を得ます。以上より、離散化されたある波の特徴は、周波数

$$0,\ \pm\Delta f,\ \pm 2\Delta f,\ \pm 3\Delta f,\ \cdots,\ \pm\frac{N}{2}\Delta f\ [\mathrm{Hz}]$$

について調べれば十分であることがわかります (第 3 章に挙げたグラフを思い出してもらいたい)。なお、周波数 Δf [Hz] を**周波数分解能**といい、周波数を Δf より細かく分解することはできません。また、周波数 f_s $(= 2f_{\max})$ [Hz] を**サンプリング周波数**といい、$f_s/2$ $(= f_{\max})$ [Hz] 以上の周波数の波は現れません (周波数領域の f_s [Hz] は、時間領域の T_0 [秒] に対応します)。

離散的な波のフーリエ変換に話を戻しましょう。前記の考察から、調べる必要のある周波数 $k\Delta f$ [Hz] $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N/2)$ の近似されたフーリエ変換の値 $X(k\Delta f)$ は、

$$\begin{aligned} X(k\Delta f) &= \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\varphi(n\Delta t) \\ &= \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i2\pi(k\Delta f)(n\Delta t)} \end{aligned}$$

となります。①式と③式より、関係式

$$\Delta f \cdot \Delta t = \frac{1}{N} \qquad \cdots④$$

が成り立つことに注意すれば、近似されたフーリエ変換の値 $X(k\Delta f)$ は、改めて、

$$X(k\Delta f) = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$$

と書き直すことができます。ここで、

$$W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}} \quad \left(= \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right)$$

とおくと、点

$$W_N{}^0,\ W_N{}^1,\ W_N{}^2,\ \cdots,\ W_N{}^{N-1}$$

は、図 4.5 のように単位円を N 等分した円周上の点となり、関係式

$$W_N{}^N = 1$$

を満たします (W_N は 1 の N 乗根となります)。さらに、関係式

$$W_N{}^{N-m} = W_N{}^N \cdot W_N{}^{-m} = 1 \cdot W_N{}^{-m} = W_N{}^{-m}$$

が成り立つことから、

$$W_N{}^{N-1} = W_N{}^{-1},\ W_N{}^{N-2} = W_N{}^{-2},\ W_N{}^{N-3} = W_N{}^{-3},\ \cdots$$

となります。

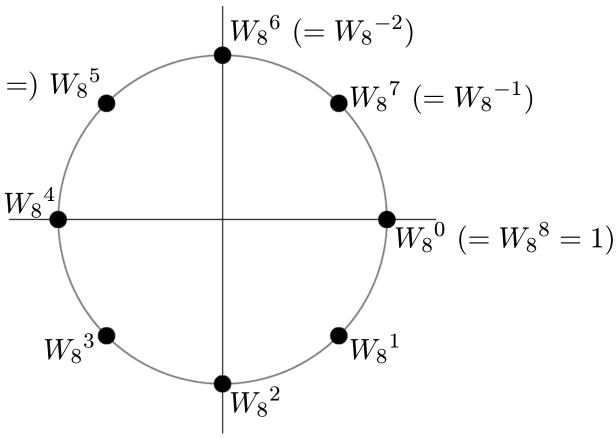

図 4.5: N 等分された単位円周上の点 ($N = 8$ の場合)

そこで、負の周波数 $-k\Delta f$ [Hz] ($k > 0$) の近似されたフーリエ変換の値を求めると、

$$\begin{aligned}
X(-k\Delta f) &= \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i\frac{2\pi n(-k)}{N}} = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)W_N{}^{n(-k)} \\
&= \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\left(W_N{}^{-k}\right)^n = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\left(1\cdot W_N{}^{-k}\right)^n \\
&= \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\left(W_N{}^N W_N{}^{-k}\right)^n = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\left(W_N{}^{N-k}\right)^n \\
&= \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)W_N{}^{n(N-k)} = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i\frac{2\pi n(N-k)}{N}} \\
&= X((N-k)\Delta f)
\end{aligned}$$

という関係が得られます。ただし、N が偶数のときは、

$$X((-N/2)\Delta f) = X((N-N/2)\Delta f) = X((N/2)\Delta f)$$

となり、同じものであるから、正の周波数 $(N/2)\Delta f$ の方を近似されたフーリエ変換の値として採用することにします。通常、一般的なフーリエ変換を扱った書籍でも N を偶数とすることが多く、以後、本テキストでも N を偶数として扱うことにします。

以上をまとめると、離散化されたフーリエ変換は、

$$X(k\Delta f) = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t){W_N}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

となります ($k > N/2$ の場合、周波数 $k\Delta f$ [Hz] は負の周波数に対応します)。さらに、簡潔に記述するために、記号

$$\begin{cases} X_k = X(k\Delta f), \\ x_n = x(n\Delta t) \end{cases} \qquad \cdots ⑤$$

を導入すると、離散化されたフーリエ変換は、

$$X_k = \frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

となります。この式を**離散フーリエ変換** (Discrete Fourier Transform; **DFT**) と呼びます (信号処理用に最適化されています)。なお、離散フーリエ変換の**離散周波数スペクトル密度** $X_{T_0}(f)$ は、

$$X_{T_0}(f) \fallingdotseq X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

となります。

理解を深めるために、例として、$N = 4$ の場合を見てみましょう。具体的に離散フーリエ変換を書き下してみると、

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^0 + x_2{W_4}^0 + x_3{W_4}^0\right), \\ X_1 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^1 + x_2{W_4}^2 + x_3{W_4}^3\right), \\ X_2 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^2 + x_2{W_4}^4 + x_3{W_4}^6\right), \\ X_3 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^3 + x_2{W_4}^6 + x_3{W_4}^9\right) = X_{-1} \end{cases}$$

となり、関係式 ${W_4}^4 = 1\ (= {W_4}^0)$ を用いると、

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^0 + x_2{W_4}^0 + x_3{W_4}^0\right), \\ X_1 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^1 + x_2{W_4}^2 + x_3{W_4}^3\right), \\ X_2 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^2 + x_2{W_4}^0 + x_3{W_4}^2\right), \\ X_3 = \dfrac{T_0}{4}\left(x_0{W_4}^0 + x_1{W_4}^3 + x_2{W_4}^2 + x_3{W_4}^1\right) = X_{-1} \end{cases}$$

となります。また、行列の形式

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

で表現することもできます。さらに、

$${W_4}^0 = 1, \quad {W_4}^1 = -i, \quad {W_4}^2 = -1, \quad {W_4}^3 = i$$

を代入すれば、具体的に離散フーリエ変換の値

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を求めることができます。もう 1 つの例として、$N = 8$ の場合を見てみましょう。具体的に離散フーリエ変換を書き下してみると、

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^0 + x_2{W_8}^0 + x_3{W_8}^0 + x_4{W_8}^0 + x_5{W_8}^0 + x_6{W_8}^0 + x_7{W_8}^0\right), \\ X_1 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^1 + x_2{W_8}^2 + x_3{W_8}^3 + x_4{W_8}^4 + x_5{W_8}^5 + x_6{W_8}^6 + x_7{W_8}^7\right), \\ X_2 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^2 + x_2{W_8}^4 + x_3{W_8}^6 + x_4{W_8}^8 + x_5{W_8}^{10} + x_6{W_8}^{12} + x_7{W_8}^{14}\right), \\ X_3 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^3 + x_2{W_8}^6 + x_3{W_8}^9 + x_4{W_8}^{12} + x_5{W_8}^{15} + x_6{W_8}^{18} + x_7{W_8}^{21}\right), \\ X_4 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^4 + x_2{W_8}^8 + x_3{W_8}^{12} + x_4{W_8}^{16} + x_5{W_8}^{20} + x_6{W_8}^{24} + x_7{W_8}^{28}\right), \\ X_5 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^5 + x_2{W_8}^{10} + x_3{W_8}^{15} + x_4{W_8}^{20} + x_5{W_8}^{25} + x_6{W_8}^{30} + x_7{W_8}^{35}\right) = X_{-3}, \\ X_6 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^6 + x_2{W_8}^{12} + x_3{W_8}^{18} + x_4{W_8}^{24} + x_5{W_8}^{30} + x_6{W_8}^{36} + x_7{W_8}^{42}\right) = X_{-2}, \\ X_7 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^7 + x_2{W_8}^{14} + x_3{W_8}^{21} + x_4{W_8}^{28} + x_5{W_8}^{35} + x_6{W_8}^{42} + x_7{W_8}^{49}\right) = X_{-1} \end{cases}$$

となり、関係式 ${W_8}^8 = 1\ (= {W_8}^0)$ を用いると、

$$\begin{cases} X_0 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^0 + x_2{W_8}^0 + x_3{W_8}^0 + x_4{W_8}^0 + x_5{W_8}^0 + x_6{W_8}^0 + x_7{W_8}^0\right), \\ X_1 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^1 + x_2{W_8}^2 + x_3{W_8}^3 + x_4{W_8}^4 + x_5{W_8}^5 + x_6{W_8}^6 + x_7{W_8}^7\right), \\ X_2 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^2 + x_2{W_8}^4 + x_3{W_8}^6 + x_4{W_8}^0 + x_5{W_8}^2 + x_6{W_8}^4 + x_7{W_8}^6\right), \\ X_3 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^3 + x_2{W_8}^6 + x_3{W_8}^1 + x_4{W_8}^4 + x_5{W_8}^7 + x_6{W_8}^2 + x_7{W_8}^5\right), \\ X_4 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^4 + x_2{W_8}^0 + x_3{W_8}^4 + x_4{W_8}^0 + x_5{W_8}^4 + x_6{W_8}^0 + x_7{W_8}^4\right), \\ X_5 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^5 + x_2{W_8}^2 + x_3{W_8}^7 + x_4{W_8}^4 + x_5{W_8}^1 + x_6{W_8}^6 + x_7{W_8}^3\right) = X_{-3}, \\ X_6 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^6 + x_2{W_8}^4 + x_3{W_8}^2 + x_4{W_8}^0 + x_5{W_8}^6 + x_6{W_8}^4 + x_7{W_8}^2\right) = X_{-2}, \\ X_7 = \dfrac{T_0}{8}\left(x_0{W_8}^0 + x_1{W_8}^7 + x_2{W_8}^6 + x_3{W_8}^5 + x_4{W_8}^4 + x_5{W_8}^3 + x_6{W_8}^2 + x_7{W_8}^1\right) = X_{-1} \end{cases}$$

となります。また、行列の形式

$$
\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}
= \frac{T_0}{8}
\begin{pmatrix}
{W_8}^0 & {W_8}^0 & {W_8}^0 & {W_8}^0 & {W_8}^0 & {W_8}^0 & {W_8}^0 & {W_8}^0 \\
{W_8}^0 & {W_8}^1 & {W_8}^2 & {W_8}^3 & {W_8}^4 & {W_8}^5 & {W_8}^6 & {W_8}^7 \\
{W_8}^0 & {W_8}^2 & {W_8}^4 & {W_8}^6 & {W_8}^0 & {W_8}^2 & {W_8}^4 & {W_8}^6 \\
{W_8}^0 & {W_8}^3 & {W_8}^6 & {W_8}^1 & {W_8}^4 & {W_8}^7 & {W_8}^2 & {W_8}^5 \\
{W_8}^0 & {W_8}^4 & {W_8}^0 & {W_8}^4 & {W_8}^0 & {W_8}^4 & {W_8}^0 & {W_8}^4 \\
{W_8}^0 & {W_8}^5 & {W_8}^2 & {W_8}^7 & {W_8}^4 & {W_8}^1 & {W_8}^6 & {W_8}^3 \\
{W_8}^0 & {W_8}^6 & {W_8}^4 & {W_8}^2 & {W_8}^0 & {W_8}^6 & {W_8}^4 & {W_8}^2 \\
{W_8}^0 & {W_8}^7 & {W_8}^6 & {W_8}^5 & {W_8}^4 & {W_8}^3 & {W_8}^2 & {W_8}^1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}
$$

で表現することもできます。さらに、

$$
{W_8}^0 = 1, \quad {W_8}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad {W_8}^2 = -i, \quad {W_8}^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},
$$

$$
{W_8}^4 = -1, \quad {W_8}^5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad {W_8}^6 = i, \quad {W_8}^7 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}
$$

を代入すれば、具体的に離散フーリエ変換の値

$$
\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}
= \frac{T_0}{8}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}
$$

を求めることができます。

ところで、このような計算 (離散フーリエ変換) をそのまま計算すると、複素数の乗算だけでも N^2 回の演算が必要です (離散フーリエ変換の計算量 (Order) は $O(N^2)$ となります)。そのため、N が大きくなるにしたがって計算量が爆発的に増加し、コンピュータを用いても、N がある程度大きくなると計算不可能となってしまいます。この計算量の問題を解決した計算方法 (アルゴリズム) に、**高速フーリエ変換** (Fast Fourier Transform; **FFT**) と呼ばれる方法があります。この方法は、西暦 1965 年にジェイムズ・クーリー (J. W. Cooley) とジョン・テューキー (J. W. Tukey) によって発見されました[2]。なお、高速フーリエ変換 (FFT) は、離散フーリエ変換 (DFD) の周期性および対称性に着目して計算量を減らしたアルゴリズムで、オーダーは $O(N \log_2 N)$ となります[3]。

[2] Cooley-Tukey アルゴリズムとも呼ばれ、後に高速フーリエ変換と呼ばれるようになりました (一般には、高速フーリエ変換といえば、Cooley-Tukey アルゴリズムによる離散フーリエ変換を指します)。西暦 1805 年ごろにガウス (Gauss) が同様のアルゴリズムを独立に発見していました。

[3] 再帰的に分割統治法 (divide and conquer) を繰り返すアルゴリズムで、演算構造を図式化すると蝶のはねのようになることから、バタフライ演算とも呼ばれます。

例題 1　ある波 $x(t)$ を 8 [秒] (区間 $[0,8]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、データ (離散的な数値列; 離散化された波)

$$(\text{データ}) = \{\ 3,\ 0,\ -3,\ 0\ \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。

解答例　$T_0 = 8$ より、周波数分解能 $\Delta f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{8} = 0.125$ [Hz] である。さらに、$N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_n {W_4}^{nk} \qquad (k = 0,1,2,3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{T_0}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

となる。$X_3 = X_{-1}$ となる ことに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-0.125	0	0.125	0.25
$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	1.5	0	1.5	0
$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm\dfrac{\pi}{4}$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 0.125$ [Hz]) の cos 波形の波であることがわかる。なお、cos 波形の波の振幅は、

$$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(0.125) + \mathrm{Re}\, X_{T_0}(-0.125) = 1.5 + 1.5 = 3$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = 3\cos\frac{\pi}{4}t$$

である。

* $X((N-k)\Delta f) = X((-k)\Delta f)$ より、$X_3 = X(3\Delta f) = X((4-1)\Delta f) = X((-1)\Delta f) = X_{-1}$。
* 表が作成できれば、3.3 節と同様に、波の特徴を調べることができます。
* 答えが正しいか、グラフを描いて確認しましょう。

例題 2 ある波 $x(t)$ を 1 [秒] (区間 $[0,1]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、データ (離散的な数値列; 離散化された波)

$$(\text{データ}) = \{\ 1,\ 1,\ -1,\ -1\ \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。

解答例 $T_0 = 1$ より、周波数分解能 $\Delta f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{1} = 1$ [Hz] である。さらに、$N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_n {W_4}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad \frac{1}{T_0}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2-i2 \\ 0 \\ 2+i2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5-i0.5 \\ 0 \\ 0.5+i0.5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。$X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-1	0	1	2
$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	0.5	0	0.5	0
$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	0.5	0	-0.5	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 1$ [Hz]) の cos 波形の波および sin 波形の波を合わせた波であることがわかる。なお、cos 波形の波および sin 波形の波の振幅は、

$$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(1) + \mathrm{Re}\, X_{T_0}(-1) = 0.5 + 0.5 = 1,$$

$$-\mathrm{Im}\, X_{T_0}(1) + \mathrm{Im}\, X_{T_0}(-1) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos 2\pi t + \sin 2\pi t$$

である。

例題 3　ある波 $x(t)$ を 2 [秒] (区間 $[0,2]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、データ (離散的な数値列; 離散化された波)

$$(\text{データ}) = \{\ 2,\ 0,\ 2,\ 0\ \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。

解答例　$T_0 = 2$ より、周波数分解能 $\Delta f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2} = 0.5$ [Hz] である。さらに、$N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_n {W_4}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\iff \quad \frac{1}{T_0}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。$X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-0.5	0	0.5	1
$\mathrm{Re}\,X_{T_0}(k\Delta f)$	0	1	0	1
$\mathrm{Im}\,X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = 1$ [Hz]) の cos 波形の波および 定数項 (直流) 1 を合わせた波であることがわかる。なお、cos 波形の波の振幅は、

$$\mathrm{Re}\,X_{T_0}(1) + \mathrm{Re}\,X_{T_0}(-1) = 1 + 0 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = 1 + \cos 2\pi t$$

である。

* $k = N/2$ の場合、負の周波数 $-(N/2)\Delta f$ [Hz] の波は 0 なので、正の周波数 $(N/2)\Delta f$ [Hz] の波のみで扱います。ちなみに、離散化された波では、表以外の波は全て 0 です。
* 定数項はフーリエ級数の $\dfrac{a_0}{2}$ に対応します。

4.2 離散フーリエ積分

この節では、前節の離散フーリエ変換にならって、**離散フーリエ積分** (**離散逆フーリエ変換**) を導きましょう。

周波数分解能を Δf [Hz]、サンプリング周波数を f_s [Hz] とし、周波数領域のスペクトル $X(f)$ の N 個の離散的な数値列 (離散化されたスペクトル) を

$$\begin{aligned}(\text{離散化されたスペクトル}) &= \{\ X(0),\ X(\Delta f),\ X(2\Delta f),\ X(3\Delta f),\ \cdots,\ X((N/2)\Delta f), \\ &\qquad X((N/2+1)\Delta f),\ \cdots,\ X((N-2)\Delta f),\ X((N-1)\Delta f)\ \} \\ &= \{\ X(0),\ X(\Delta f),\ X(2\Delta f),\ X(3\Delta f),\ \cdots,\ X((N/2)\Delta f), \\ &\qquad X((-N/2+1)\Delta f),\ \cdots,\ X(-2\Delta f)\ ,\ X(-\Delta f)\ \}\end{aligned}$$

としましょう (前節の考察より、離散化されたスペクトルの後半の項は負の周波数のスペクトルに対応していることにも注意しましょう)。**離散フーリエ積分**を得るために、積分区間が $[-f_s/2, f_s/2]$ となることに注意し、区分求積法を使って、近似されたフーリエ積分 $x(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df &= \int_{-f_s/2}^{f_s/2} X(f)e^{i2\pi ft}df \\ &\fallingdotseq \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X(k\Delta f)e^{i2\pi(k\Delta f)t}\Delta f \qquad (\because \text{区分求積法}) \\ &= \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f)e^{i2\pi(k\Delta f)t} \qquad (\because \text{負の周波数の書き換え})\end{aligned}$$

となります。さらに、サンプリング間隔を Δt [秒] とおくと、各時間 $n\Delta t$ [秒] $(n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ における近似されたフーリエ積分の値 $x(n\Delta t)$ は、

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f)e^{i2\pi(k\Delta f)(n\Delta t)}$$

となります。なお、前節の③式より、関係式

$$T_0 = \frac{1}{\Delta f}\ [\text{秒}]$$

が成り立ち、観測区間 $[0, T_0]$ は $[0, 1/\Delta f]$ となることも注意しておきましょう。続けて、近似されたフーリエ積分の値 $x(n\Delta t)$ に前項の④式を代入すると、

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f)e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$$

となります。ここで、簡潔に記述するために、記号

$$W'_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

および前節の⑤式の記号を導入すると、離散化されたフーリエ積分は、

$$x_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X_k {W'_N}^{nk} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

となります。離散フーリエ変換との対応を考慮してさらに書き直すと、離散化されたフーリエ積分は、

$$x_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} X_k {W'_N}^{nk} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

となります[4] (∵前節の③式)。この式を**離散フーリエ積分**[5] (**離散逆フーリエ変換**) と呼びます。

---

[4]本テキストで周波数スペクトル密度と呼んでいるものを離散フーリエ変換の定義とする書籍もあります (T_0 が消えて、数式として美しい)。

$$\begin{cases} x_n &= \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X_k {W'_N}^{nk}, \\ X_k &= \dfrac{T_0}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk} \end{cases} \qquad \text{(本テキストの定義)}$$

$$\begin{cases} x_n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X_k {W'_N}^{nk}, \\ X_k &= \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk} \end{cases} \qquad \text{(一般的な定義)}$$

$$\begin{cases} x_n &= \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X_k {W'_N}^{nk}, \\ X_k &= \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk} \end{cases} \qquad \text{(数式処理ソフト Mathematica のデフォルトの定義)}$$

[5]離散フーリエ変換と同様に、高速フーリエ変換のアルゴリズムを用いることで離散フーリエ積分の計算量を減らすことができます。