2006年度 情報科学I　レポート5　学生用

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2006年7月11日(火) 15:00まで
提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

(1) このページを印刷し、必要事項を記入の上(学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。

(2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し~~(問→解答→問→解答→ ··· の順になるように記述すること)、A4サイズの用紙~~に印刷して提出すること(手書きは不可)。~~

(3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止**。

(4) 情報科学Iについて、あなたの声を聞かせてください(教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ(成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人
出題日： 2006年6月28日(水)

得点：　　/6

－－－－－－－－－－－－ 切り取り線 －－－－－－－－－－－－

2006年度 情報科学I　レポート5　教員控

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

協力者氏名：　　　　　　　　,　　　　　　　　,

レポート作成に要した時間：　　　.　　　時間

得点：　　/6

意見・質問：

$\boxed{\textbf{問 1}}$　2 元符号 $\mathrm{GF}(2)=\{0,1\}$ 上において、情報 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2)$ の検査ビット (p_1,p_2,p_3) を関数

$$\begin{cases} p_1 = i_1 + i_2 \\ p_2 = i_1 \\ p_3 = \quad\ i_2 \end{cases}$$

で与え、符号語が $\boldsymbol{x}=(i_1,i_2,p_1,p_2,p_3)$ となる [5,2] 線形符号を構成する。この線形符号について、次の (1)〜(4) の問いに答えなさい。(1 点 ×4)

(1) 生成行列 G および検査行列 H を求めなさい。

解答例　定義より、

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 符号語 $\boldsymbol{x}$ を全てリストアップしなさい。

解答例 1 (Im G として求める)　4 通りの情報 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2)$ に対して、符号語 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{i}\,G$ をそれぞれ求めればよい (関数 $p_1=i_1+i_2$, $p_2=i_1$, $p_3=i_2$ に代入しても同じ)。従って、

$$\begin{aligned} &\text{情報 } (0,0) \text{ に対する符号語 } [0\ 0]\,G \text{ は } (0,0,0,0,0), \\ &\text{情報 } (0,1) \text{ に対する符号語 } [0\ 1]\,G \text{ は } (0,1,1,0,1), \\ &\text{情報 } (1,0) \text{ に対する符号語 } [1\ 0]\,G \text{ は } (1,0,1,1,0), \\ &\text{情報 } (1,1) \text{ に対する符号語 } [1\ 1]\,G \text{ は } (1,1,0,1,1) \end{aligned}$$

となる。

解答例 2 (Ker H として求める)　符号語 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}\,H^T=\boldsymbol{0}$ を満たすから、方程式

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 0] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_4=0 \\ x_2+x_5=0 \end{cases}$$

を解けばよい。それぞれ $x_3=x_1+x_2$, $x_4=x_1$, $x_5=x_2$ だから、x_1 および x_2 をパラメータとして符号語を求めれば、

$$\begin{aligned} &x_1=0 \text{ かつ } x_2=0 \text{ のとき符号語は } (0,0,0,0,0), \\ &x_1=0 \text{ かつ } x_2=1 \text{ のとき符号語は } (0,1,1,0,1), \\ &x_1=1 \text{ かつ } x_2=0 \text{ のとき符号語は } (1,0,1,1,0), \\ &x_1=1 \text{ かつ } x_2=1 \text{ のとき符号語は } (1,1,0,1,1) \end{aligned}$$

となる ($x_i=i_1$, $x_2=i_2$, $x_3=p_1$, $x_4=p_2$, $x_5=p_3$ と置き直せば解答例 1 と全く同じ計算をしていることがわかる $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\ G=\mathrm{Ker}\ H$)。

(3) 最小距離 $d_{\min}$ を求めなさい。

解答例 1　検査行列 H の ある 1 つの列ベクトルは他の列ベクトルのスカラー倍となっていないことから、任意の 2 つの縦ベクトルは 1 次独立である。従って、各符号語間のハミング距離は 2+1 以上であることがわかる (GF(2) のときはスカラーとして取れるのは 1 だけであるから、同じものを含まなければよい)。逆に、例えば、検査行列 H の第 1 列は第 3 列と第 4 列の 1 次結合

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書けるから、ある符号語間のハミング距離が $2+1$ となるものが存在する。ゆえに、最小距離 $d_{\min}$ は 3 となる (一般に、最小距離が検査行列 H の階数 (ランク) に 1 を足したもの以下であることはわかるが、列ベクトルの行数が多くなると実際に書き出してみないと 1 次独立な最小の組を見つけることはできない)。

解答例 2　(2) で求めた符号語をそれぞれ

$$x_1 = (0,0,0,0,0), \quad x_2 = (0,1,1,0,1), \quad x_3 = (1,0,1,1,0), \quad x_4 = (1,1,0,1,1)$$

とおく。各符号語間のハミング距離を求めると以下のようになる (注意：$d_H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = d_H(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$)。

d_H	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	−	3	3	4
x_2	−	−	4	3
x_3	−	−	−	3
x_4	−	−	−	−

従って、最小距離 $d_{\min}$ は 3 となる (符号語が少ない場合は直接求めた方が楽かも？)。

(4) 誤りの検出が可能、かつ、誤り訂正が不可能な受信語 $\boldsymbol{y}$ を全てリストアップしなさい。

解答例　(3) より、誤りが訂正可能な数は 1 $(= [3-1]/2)$ であるから、1 個の符号語につき誤り訂正可能な受信語が 5 個ある。また、受信語 $\boldsymbol{y}$ は全部で 32 $(= 2^5)$ 個あるから、誤りの検出しかできない受信語は 8 $(= 32 - (1+5) \times 4)$ 個である。従って、全ての受信語から符号語および訂正可能な受信語を消去し、誤りの検出が可能、かつ、誤り訂正が不可能な受信語を見つける。

符号語	$(0,0,0,0,0)$	1
	$(\underline{1},0,0,0,0)$	2
	$(0,\underline{1},0,0,0)$	3
	$(0,0,\underline{1},0,0)$	4
	$(0,0,0,\underline{1},0)$	5
	$(0,0,0,0,\underline{1})$	6
符号語	$(0,1,1,0,1)$	7
	$(\underline{1},1,1,0,1)$	8
	$(0,\underline{0},1,0,1)$	9
	$(0,1,\underline{0},0,1)$	10
	$(0,1,1,\underline{1},1)$	11
	$(0,1,1,0,\underline{0})$	12
符号語	$(1,0,1,1,0)$	13
	$(\underline{0},0,1,1,0)$	14
	$(1,\underline{1},1,1,0)$	15
	$(1,0,\underline{0},1,0)$	16
	$(1,0,1,\underline{0},0)$	17
	$(1,0,1,1,\underline{1})$	18
符号語	$(1,1,0,1,1)$	19
	$(\underline{0},1,0,1,1)$	20
	$(1,\underline{0},0,1,1)$	21
	$(1,1,\underline{1},1,1)$	22
	$(1,1,0,\underline{0},1)$	23
	$(1,1,0,1,\underline{0})$	24

* 下線部が符号語に対する誤り部分

$(0,0,0,0,0)$	1
$(0,0,0,0,1)$	6
$(0,0,0,1,0)$	5
$(0,0,0,1,1)$	
$(0,0,1,0,0)$	4
$(0,0,1,0,1)$	9
$(0,0,1,1,0)$	14
$(0,0,1,1,1)$	
$(0,1,0,0,0)$	3
$(0,1,0,0,1)$	10
$(0,1,0,1,0)$	
$(0,1,0,1,1)$	20
$(0,1,1,0,0)$	12
$(0,1,1,0,1)$	7
$(0,1,1,1,0)$	
$(0,1,1,1,1)$	11
$(1,0,0,0,0)$	2
$(1,0,0,0,1)$	
$(1,0,0,1,0)$	16
$(1,0,0,1,1)$	21
$(1,0,1,0,0)$	17
$(1,0,1,0,1)$	
$(1,0,1,1,0)$	13
$(1,0,1,1,1)$	18
$(1,1,0,0,0)$	
$(1,1,0,0,1)$	23
$(1,1,0,1,0)$	24
$(1,1,0,1,1)$	19
$(1,1,1,0,0)$	
$(1,1,1,0,1)$	8
$(1,1,1,1,0)$	15
$(1,1,1,1,1)$	22

従って、誤りの検出が可能、かつ、誤り訂正が不可能な受信語は

$$(0,0,0,1,1),\quad (0,0,1,1,1),\quad (0,1,0,1,0),\quad (0,1,1,1,0),$$
$$(1,0,0,0,1),\quad (1,0,1,0,1),\quad (1,1,0,0,0),\quad (1,1,1,0,0)$$

の合計 8 個である (何れの符号語からも 2 以上 (2 または 3) のハミング距離を持っている)。

評価基準　解答例に準じた解答であれば各 1 点。

問 2　非 2 元符号 $\mathrm{GF}(3) = \{0, 1, 2\} \pmod 3$ 上の 1 つの誤りが訂正可能な線形符号の検査行列 H を以下の書式に合うように 1 つ作りなさい。(2 点)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & 0 & 1 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解答例　検査行列 H の階数 (ランク) が 3 であることから、$\{0, 1, 2\}$ の全ての組み合わせ 3^3 個の列ベクトルを作ると以下のようになる。

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

まず、零ベクトル $\mathbf{0}$ は不適切なので除く (零ベクトル自身で 1 次従属となる; 符号語そのものである; ハミング距離が 0 である)。従って、$3^3 - 1$ 個の列ベクトルが候補として残る。次に、例えば、

$$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

などのようにスカラー倍 (1 または 2; 0 は除く) になっているものは 1 次従属なので一方を除く。ただし、書式に合うように第 1 行が 0 または 1 となるものを残す。従って、以下の $(3^3 - 1)/(3 - 1)$ 個の列ベクトルが残る (これが非 2 元符号の符号長となる; テキストの 50 ページも参照)。

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\left(\text{or } \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\left(\text{or } \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right),$$
$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

以上より、書式に合わせて検査行列 H を記述すれば、例えば

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

評価基準　解答例に準じた解答であれば 2 点。ただし、スカラー倍が 1 次従属であることに気づいたと思われる解答には部分点 1 点。