2007 年度 離散数理　レポート 2　学生用

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限：2007 年 5 月 15 日 (火) 13:00 まで
提出場所：理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

(1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は 2 箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。

(2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し~~ (問→解答→問→解答→ ··· の順になるように記述すること)、A4 サイズの用紙~~に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~

(3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止**。

(4) 離散数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者：幸山 直人
出題日：2007 年 5 月 9 日 (水)

得点：　　/6

– – – – – – – – – – – – – – – – 切り取り線 – – – – – – – – – – – – – – – –

2007 年度 離散数理　レポート 2　教員控

学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：

協力者氏名：　　　　　　,　　　　　　,

レポート作成に要した時間：　　　.　　　時間

得点：　　/6

意見・質問：

$\boxed{\textbf{問 1}}$　次の (1)〜(3) の問いに答えなさい。(1 点 ×3)

(1) 複素平面上の直交座標表示された点 $3 + i\,3\sqrt{3}$ を三角関数による極座標表示で表しなさい。

解答例　原点を中心とし、点 $3 + i\,3\sqrt{3}$ を通る円の半径 r は、

$$r = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$$

である。また、点 $3 + i\,3\sqrt{3}$ の偏角 θ は、

$$\theta = \arg(3 + i\,3\sqrt{3}) = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\ [\mathrm{rad}]$$

である。したがって、点 $3 + i\,3\sqrt{3}$ を三角関数による極座標表示で表すと

$$6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

である。

(2) 複素平面上の直交座標表示された点 $-2 + i\,2$ を指数関数による極座標表示で表しなさい。

解答例　原点を中心とし、点 $-2 + i\,2$ を通る円の半径 r は、

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

である。また、点 $-2 + i2$ が第 2 象限にあることに注意すれば、点 $-2 + i\,2$ の偏角 θ は、

$$\theta = \arg(-2 + i\,2) = \pi + \arctan\frac{2}{-2} = \pi + \arctan(-1) = \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}\ [\mathrm{rad}]$$

である。したがって、点 $-2 + i\,2$ を指数関数による極座標表示で表すと

$$2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

である。

(3) 複素平面上の極座標表示された点 $5\,e^{i\pi}$ を直交座標表示で表しなさい。

解答例　$\cos\pi = -1$ かつ $\sin\pi = 0$ より、点 $5\,e^{i\pi}$ を直交座標表示で表すと

$$\begin{aligned} 5\,e^{i\pi} &= 5\ (\cos\pi + i\sin\pi) \\ &= 5\ ((-1) + i\,0) \\ &= -5 \end{aligned}$$

である。

評価基準　解答例に準じた解答であれば各 1 点。

$\boxed{\textbf{問 2}}$ 直交関数系 (ベクトル) $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$ が 1 次独立であることを示すために、次の (1)〜(3) の問いに答えなさい。ただし、$a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots$ を実係数とし、級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

は、区間 $[-\pi,\pi]$ で収束し、項別積分可能とする。(1 点 ×3)

(1) 直交関数系の内積

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cdot\cos kx\,dx \qquad (k=1,2,\cdots)$$

を計算しなさい。

解答例 それぞれ、1 に対して、

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos kx\,dx=\left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{k}\sin k\pi-\frac{1}{k}\sin(-k\pi)=0-0=0,$$

$\sin nx$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos kx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\sin(n+k)x+\sin(n-k)x\right)dx \quad (\because \text{定理 } 4.1)\\&=0 \qquad\qquad (\because \sin\text{ 関数は奇関数であるから}),\end{aligned}$$

$\cos nx\ (k\neq n)$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(n+k)x+\cos(n-k)x\right)dx \quad (\because \text{定理 } 4.1)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+k}(\sin(n+k)x)+\frac{1}{n-k}(\sin(n-k)x)\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{1}{2}\left((0+0)-(0+0)\right)=0,\end{aligned}$$

$\cos nx\ (k=n)$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos kx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx \quad (\because 2\text{ 倍角の公式より})\\&=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2k}(\sin 2kx)\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\frac{1}{2}\left((\pi+0)-(-\pi+0)\right)=\pi\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cdot\cos kx\,dx=\pi a_k \qquad (k=1,2,\cdots)$$

である。

(2) 級数が

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0$$

を満たすとき、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cdot\cos kx\,dx=0\qquad(k=1,2,\cdots)$$

を示しなさい。

解答例

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cdot\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}0\cdot\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}0\,dx=0.$$

(3) (2) のとき、$a_k=0$ $(k=1,2,\cdots)$ を示しなさい。

解答例　(1), (2) より $\pi a_k=0$ $(k=1,2,\cdots)$ であるから、直ちに $a_k=0$ が得られる。

同様に、級数と直交関数系 1, $\sin kx$ $(k=1,2,\cdots)$ の内積を計算すると、$a_0=0$, $b_k=0$ が得られる。すなわち、

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0$$

ならば、

$$a_0=a_k=b_k=0\qquad(k=1,2,\cdots)$$

が成り立ち、直交関数系 (ベクトル) 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cdots$, $\cos nx$, $\sin nx$, $\cdots$ は 1 次独立である。

評価基準　解答例に準じた解答であれば各 1 点。