

2007 年度 離散数理 レポート 3

学生用

学籍番号： _____

氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2007 年 5 月 22 日 (火) 13:00 まで

提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は 2 箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し (問→解答→問→解答→… の順になるように記述すること)、A4 サイズの用紙に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 離散数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人

出題日： 2007 年 5 月 16 日 (水)

得点：

/ 6

----- 切り取り線 -----

2007 年度 離散数理 レポート 3

教員控

学籍番号： _____

氏名： _____

協力者氏名： _____ , _____ , _____

レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：

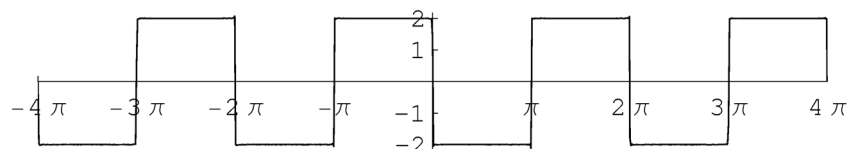
/ 6

意見・質問：

問 1 周期 2π を持つ奇関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x < 0), \\ -1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

のフーリエ正弦級数を求めなさい。(2 点)



解答例 奇関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -1 \cdot \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - 1) \\ &= 2 \frac{((-1)^k - 1)}{k\pi} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2π を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{((-1)^n - 1)}{n\pi} \sin nx$$

となる。

* 上記の関数は正確な奇関数ではありませんが、関数の不連続点 0 におけるフーリエ級数の収束点は

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

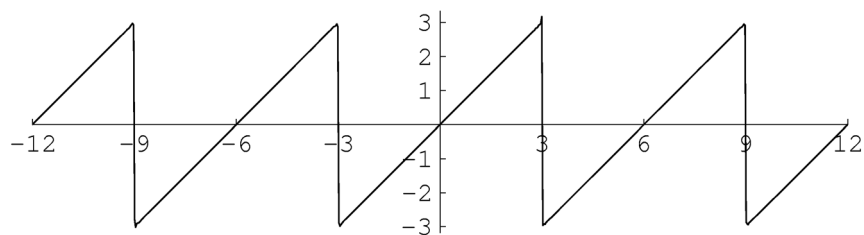
となるため、奇関数と同等に扱うことができます。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 2 周期 6 を持つ奇関数

$$f(x) = x \quad (-3 \leq x < 3)$$

のフーリエ正弦級数を求めなさい。(2 点)



解答例 奇関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{3} x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 x \cdot \sin \frac{k\pi}{3} x \, dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{3}{k\pi} x \left(-\cos \frac{k\pi}{3} x \right) \right]_0^3 - \frac{2}{3} \int_0^3 \left(-\cos \frac{k\pi}{3} x \right) dx \\ &= \frac{2}{k\pi} (-3 \cos k\pi - 0) - \frac{2}{3} \left[\frac{3}{k\pi} \left(-\sin \frac{k\pi}{3} x \right) \right]_0^3 \\ &= \frac{-6 \cos k\pi}{k\pi} - (0 - 0) \\ &= 6 \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi} \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 6 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 6 \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} x$$

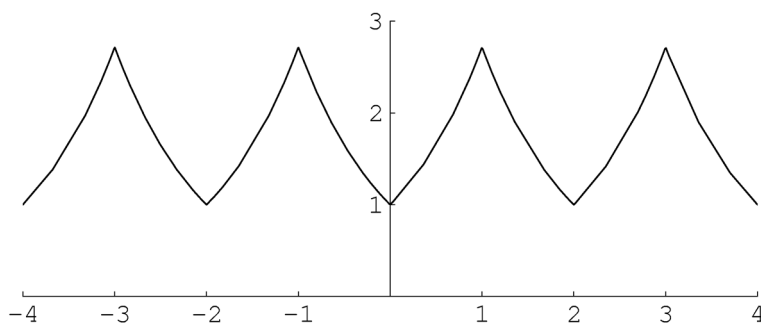
となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 3 周期 2 を持つ偶関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (-1 \leq x < 0), \\ e^x & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

のフーリエ余弦級数を求めなさい。(2 点)



解答例 偶関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cdot 1 \, dx = 2 \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx = 2 \int_0^1 e^x \, dx = 2[e^x]_0^1 = 2(e - 1),$$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cdot \cos \frac{k\pi}{1} x \, dx = 2 \int_0^1 e^x \cdot \cos k\pi x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int e^x \cos k\pi x \, dx &= e^x \cos k\pi x - k\pi \int e^x (-\sin k\pi x) \, dx \\ &= e^x \cos k\pi x - k\pi \left(e^x (-\sin k\pi x) - k\pi \int e^x (-\cos k\pi x) \, dx \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\int e^x \cos k\pi x \, dx = \frac{1}{1 + k^2\pi^2} (e^x \cos k\pi x + k\pi e^x \sin k\pi x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る。したがって、フーリエ係数 a_k は、

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \frac{1}{1 + k^2\pi^2} [e^x \cos k\pi x + k\pi e^x \sin k\pi x]_0^1 \\ &= 2 \frac{1}{1 + k^2\pi^2} (e \cos k\pi - 1) = 2 \frac{(-1)^k e - 1}{1 + k^2\pi^2} \end{aligned}$$

となり、周期 2 を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim (e - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n e - 1}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。