

2007 年度 離散数理 レポート 4

学生用

学籍番号： _____

氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2007 年 6 月 5 日 (火) 13:00 まで

提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は 2 箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し (問→解答→問→解答→… の順になるように記述すること)、A4 サイズの用紙に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 離散数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人

出題日： 2007 年 5 月 30 日 (水)

得点：

/ 6

----- 切り取り線 -----

2007 年度 離散数理 レポート 4

教員控

学籍番号： _____

氏名： _____

協力者氏名： _____ , _____ , _____

レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：

/ 6

意見・質問：

問 1 偶関数

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (-1 \leq x < 0), \\ e^{-x} & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

のフーリエ余弦変換 $C(u)$ を求めなさい。(2 点)

解答例 偶関数であることに注意すると、フーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 e^{-x} \cos ux \, dx$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos ux \, dx &= -e^{-x} \cos ux - \int -e^{-x} (\cos ux)' \, dx \\ &= -e^{-x} \cos ux - \int -e^{-x} (-u \sin ux) \, dx \\ &= -e^{-x} \cos ux - u \int e^{-x} \sin ux \, dx \\ &= -e^{-x} \cos ux - u \left(-e^{-x} \sin ux - \int -e^{-x} (\sin ux)' \, dx \right) \\ &= -e^{-x} \cos ux - u \left(-e^{-x} \sin ux - \int -e^{-x} (u \cos ux) \, dx \right) \\ &= -e^{-x} \cos ux + u e^{-x} \sin ux - u^2 \int e^{-x} \cos ux \, dx \end{aligned}$$

であるから、

$$\int e^{-x} \cos ux \, dx = \frac{1}{1+u^2} (-e^{-x} \cos ux + u e^{-x} \sin ux) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る。したがって、偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$\begin{aligned} C(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{1+u^2} (-e^{-x} \cos ux + u e^{-x} \sin ux) \right]_0^1 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+u^2} [-e^{-x} (\cos ux - u \sin ux)]_0^1 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+u^2} (-e^{-1} (\cos u - u \sin u) - (-1)(\cos 0 - u \sin 0)) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-\cos u + u \sin u + e}{e(1+u^2)} \quad (= F(u)) \end{aligned}$$

となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 2 奇関数

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

のフーリエ正弦変換 $S(u)$ を求めなさい。(2 点)

解答例 奇関数であることに注意すると、フーリエ正弦変換 $S(u)$ は、

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin ux \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 x^3 \sin ux \, dx$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin ux \, dx &= x^3 \left(\frac{-\cos ux}{u} \right) - \int 3x^2 \left(\frac{-\cos ux}{u} \right) dx \\ &= -\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3}{u} \int x^2 \cos ux \, dx \\ &= -\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3}{u} \left(x^2 \left(\frac{\sin ux}{u} \right) - \int 2x \left(\frac{\sin ux}{u} \right) dx \right) \\ &= -\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3x^2 \sin ux}{u^2} - \frac{6}{u^2} \int x \sin ux \, dx \\ &= -\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3x^2 \sin ux}{u^2} - \frac{6}{u^2} \left(x \left(\frac{-\cos ux}{u} \right) - \int 1 \left(\frac{-\cos ux}{u} \right) dx \right) \\ &= -\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3x^2 \sin ux}{u^2} + \frac{6x \cos ux}{u^3} - \frac{6}{u^3} \int \cos ux \, dx \\ &= -\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3x^2 \sin ux}{u^2} + \frac{6x \cos ux}{u^3} - \frac{6 \sin ux}{u^4} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

を得る。したがって、奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換 $S(u)$ は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{x^3 \cos ux}{u} + \frac{3x^2 \sin ux}{u^2} + \frac{6x \cos ux}{u^3} - \frac{6 \sin ux}{u^4} \right]_0^1 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left(-\frac{\cos u}{u} + \frac{3 \sin u}{u^2} + \frac{6 \cos u}{u^3} - \frac{6 \sin u}{u^4} \right) - (-0 + 0 + 0 - 0) \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-u^3 \cos u + 3u^2 \sin u + 6u \cos u - 6 \sin u}{u^4} \quad (= iF(u)) \end{aligned}$$

となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 3 関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \pi), \\ 0 & (x < 0, x > \pi) \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(u)$ を求めなさい。(2 点)

解答例 フーリエ変換 $F(u)$ は、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin x \cdot e^{-iux} dx$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot e^{-iux} dx &= (-\cos x) \cdot e^{-iux} - \int (-\cos x) \cdot (e^{-iux})' dx \\ &= -\cos x \cdot e^{-iux} + (-iu) \int \cos x \cdot e^{-iux} dx \\ &= -\cos x \cdot e^{-iux} + (-iu) \left(\sin x \cdot e^{-iux} - \int \sin x \cdot (e^{-iux})' dx \right) \\ &= -\cos x \cdot e^{-iux} + (-iu) \left(\sin x \cdot e^{-iux} - (-iu) \int \sin x \cdot e^{-iux} dx \right) \\ &= -\cos x \cdot e^{-iux} - iu \sin x \cdot e^{-iux} + u^2 \int \sin x \cdot e^{-iux} dx \end{aligned}$$

であるから、

$$\int \sin x \cdot e^{-iux} dx = \frac{1}{1-u^2} (-\cos x \cdot e^{-iux} - iu \sin x \cdot e^{-iux}) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る。したがって、関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1-u^2} (-\cos x \cdot e^{-iux} - iu \sin x \cdot e^{-iux}) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-u^2} [-e^{-iux} (\cos x + iu \sin x)]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-u^2} (-e^{-iu\pi} (\cos \pi + iu \sin \pi) - (-1)(\cos 0 + iu \sin 0)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1-u^2} (-e^{-iu\pi} (-1 + 0) - (-1)(1 + 0)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\pi u} + 1}{1-u^2} \end{aligned}$$

となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。