

2007年度 離散数理 レポート5 学生用

学籍番号： _____ 氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2007年6月19日(火) 13:00まで
提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上(学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し(問→解答→問→解答→…の順になるように記述すること)、A4サイズの内紙に印刷して提出すること(手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 離散数理について、あなたの声を聞かせてください(教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ(成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人
出題日： 2007年6月13日(水)

得点：	/6
-----	----

----- 切り取り線 -----

2007年度 離散数理 レポート5 教員控

学籍番号： _____ 氏名： _____

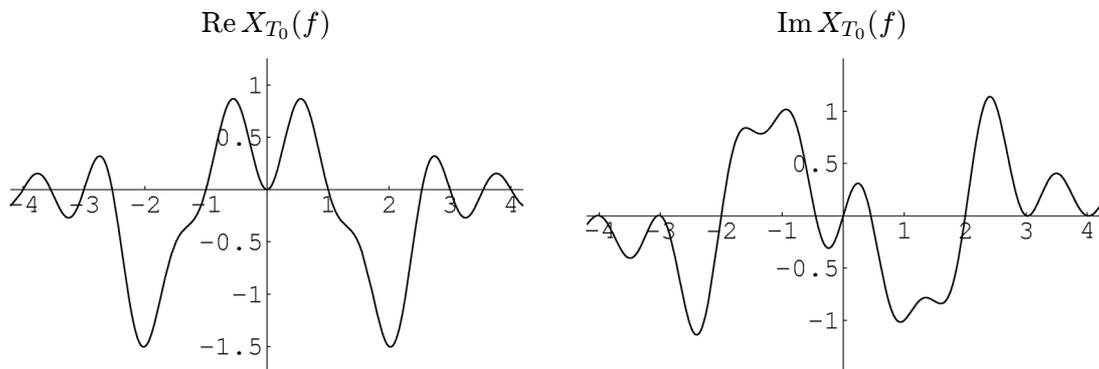
協力者氏名： _____ , _____ , _____

レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：	/6
-----	----

意見・質問：

問 1 周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。(2 点)



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	\dots
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	$\frac{8}{3\pi}$	0	$-\frac{8}{5\pi}$	-1.5	$-\frac{8}{21\pi}$	0	$-\frac{8}{45\pi}$	0	\dots
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	$\mp \frac{2}{5\pi}$	∓ 1	$\mp \frac{18}{7\pi}$	0	$\pm \frac{10}{3\pi}$	0	$\pm \frac{14}{11\pi}$	0	\dots

解答例 周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。したがって、周波数が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 4\pi \text{ [rad/秒]}$$

の \cos 波形の波を含み、その振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(2) + \text{Re } X_{T_0}(-2) = -1.5 + (-1.5) = -3$$

となる。同様に、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm 2\pi \text{ [rad/秒]}$$

の \sin 波形の波を含み、その振幅は、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

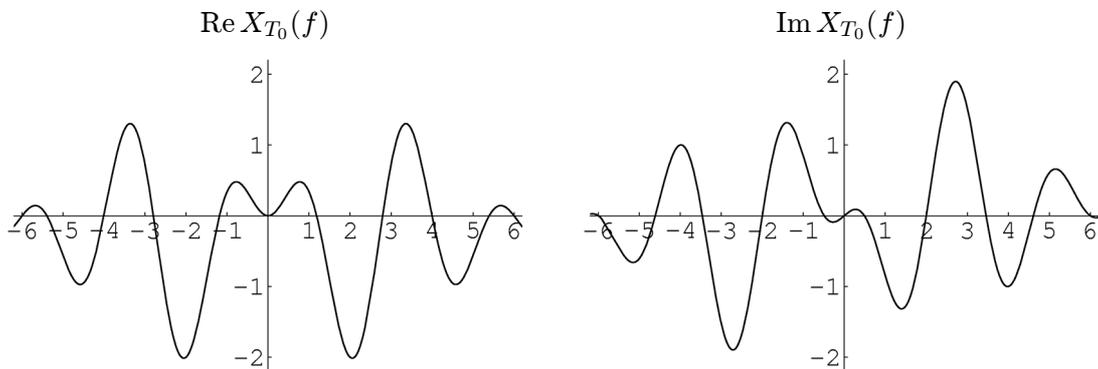
となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = 2 \sin 2\pi t - 3 \cos 4\pi t$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問 2 周期 $T_0 = 0.5$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 0.5]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。(2 点)



周波数 f [Hz]	0	± 1.0	± 2.0	± 3.0	± 4.0	± 5.0	± 6.0	...
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	$\frac{16}{15\pi}$	-2	$\frac{16}{7\pi}$	0	$-\frac{16}{9\pi}$	0	...
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	$\mp \frac{8}{3\pi}$	0	$\pm \frac{24}{5\pi}$	∓ 1	$\pm \frac{40}{21\pi}$	0	...

解答例 周期 $T_0 = 0.5$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0.5} = 2$ [Hz] である。したがって、周波数が $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm 4\pi \text{ [rad/秒]}$$

の \cos 波形の波を含み、その振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(2) + \text{Re } X_{T_0}(-2) = -2 + (-2) = -4$$

となる。同様に、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 4$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 8\pi \text{ [rad/秒]}$$

の \sin 波形の波を含み、その振幅は、

$$-\text{Im } X_{T_0}(4) + \text{Im } X_{T_0}(-4) = -(-1) + 1 = 2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -4 \cos 4\pi t + 2 \sin 8\pi t$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

問3 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f_1 = \pm 2$ および $f_2 = \pm 4$ [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 2) = -2$ および $X_{T_0}(\pm 4) = \mp i$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 $C (> 0)$, 初期位相 ϕ [rad] をそれぞれ求め、波の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。(2点)

解答例 周波数 $f_1 = \pm 2$ [Hz] のとき、角速度 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm 4\pi$ [rad/秒] で、振幅 C_1 および初期位相 ϕ_1 [rad] は、それぞれ、

$$C_1 = |X_{T_0}(2)| + |X_{T_0}(-2)| = |-2| + |-2| = 2 + 2 = 4,$$

$$\phi_1 = \arg X_{T_0}(2) = \arg(-2) = \pi$$

である。同様に、周波数 $f_2 = \pm 4$ [Hz] のとき、角速度 $\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 8\pi$ [rad/秒] で、振幅 C_2 および初期位相 ϕ_2 [rad] は、それぞれ、

$$C_2 = |X_{T_0}(4)| + |X_{T_0}(-4)| = |-i| + |i| = 1 + 1 = 2,$$

$$\phi_2 = \arg X_{T_0}(4) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

である。以上より、ある波は、

$$x(t) = 4 \cos(4\pi t + \pi) + 2 \cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

である。

* **問2** と同じ波を求める問いであり、その表現方法が異なるだけである。

$$\begin{aligned} 4 \cos(4\pi t + \pi) + 2 \cos\left(8\pi t - \frac{\pi}{2}\right) &= 4(\cos 4\pi t \cos \pi - \sin 4\pi t \sin \pi) \\ &\quad + 2\left(\cos 8\pi t \cos \frac{\pi}{2} + \sin 8\pi t \sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4(\cos 4\pi t \cdot (-1) - \sin 4\pi t \cdot 0) \\ &\quad + 2(\cos 8\pi t \cdot 0 + \sin 8\pi t \cdot 1) \\ &= -4 \cos 4\pi t + 2 \sin 8\pi t \end{aligned}$$

評価基準 解答例に準じた解答であれば2点。