2007年度 離散数理　レポート6　学生用

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2007年7月3日(火) 13:00まで
提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

(1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
(2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し~~ (問→解答→問→解答→ ··· の順になるように記述すること)、A4サイズの用紙~~に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~
(3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止**。
(4) 離散数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人
出題日： 2007年6月27日(水)

得点：　　　/6

－－－－－－－－－－－－－－－－－－ 切り取り線 －－－－－－－－－－－－－－－－－－

2007年度 離散数理　レポート6　教員控

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　氏名：

協力者氏名：　　　　　　　,　　　　　　　,

レポート作成に要した時間：　　　.　　　時間

得点：　　　/6

意見・質問：

$\boxed{\textbf{問 1}}$ ある波 $x(t)$ を 1 [秒] (区間 $[0,1]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ; リスト)

$$\{\ 0,\ -2,\ 0,\ 2\ \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。(2 点)

解答例 $T_0 = 1$ より、周波数分解能 $\Delta f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{1} = 1$ [Hz] である。さらに、$N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_n {W_4}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\iff \quad \frac{1}{T_0}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ i4 \\ 0 \\ -i4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

となる。$X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-1	0	1	2
$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0
$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	-1	0	1	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 1$ [Hz]) の sin 波形の波であることがわかる。なお、sin 波形の波の振幅は、

$$-\mathrm{Im}\, X_{T_0}(1) + \mathrm{Im}\, X_{T_0}(-1) = -(1) + (-1) = -2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -2\sin 2\pi t$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。

$\boxed{\textbf{問 2}}$　ある波 $x(t)$ を 0.5 [秒] (区間 $[0, 0.5]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ; リスト)

$$\{\ 2,\ -1,\ 0,\ -1\ \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。(2 点)

解答例　$T_0 = 0.5$ より、周波数分解能 $\Delta f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{0.5} = 2$ [Hz] である。さらに、$N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_n {W_4}^{nk} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\iff \quad \frac{1}{T_0}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

となる。$X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-2	0	2	4
$\mathrm{Re}\,X_{T_0}(k\Delta f)$	0.5	0	0.5	1
$\mathrm{Im}\,X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm 4\pi$ [rad/秒] (周波数 $f_1 = \pm 2$ [Hz]) および角速度 $\omega_2 = 2\pi f_2 = 8\pi$ [rad/秒] (周波数 $f_2 = 4$ [Hz]) の 2 つの cos 波形の波を合わせた波であることがわかる。なお、cos 波形の波のそれぞれの振幅は、

$$\mathrm{Re}\,X_{T_0}(2) + \mathrm{Re}\,X_{T_0}(-2) = 0.5 + 0.5 = 1,$$

$$\mathrm{Re}\,X_{T_0}(4) + \mathrm{Re}\,X_{T_0}(-4) = 1 + 0 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos 4\pi t + \cos 8\pi t$$

である。

評価基準　解答例に準じた解答であれば 2 点。

$\boxed{\textbf{問 3}}$ 周波数分解能 $\Delta f = 0.5$ [Hz] の離散化されたスペクトルを

$$\{\ 1,\ -1,\ 0, -1\ \}\ (= \{\ X_0,\ X_1,\ X_2, X_3\ \})$$

とするとき、離散化されたスペクトルの離散フーリエ積分 x_n $(n = 0, 1, 2, 3)$ を求めなさい。(2 点)

解答例 離散フーリエ積分の定義より、

$$x_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} X_k {W'_N}^{nk} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

である。$N = 4$ かつ $T_0 = \dfrac{1}{\Delta f} = \dfrac{1}{0.5} = 2$ [秒] より、離散フーリエ積分を行列の形式で表現すると、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} {W'_4}^0 & {W'_4}^0 & {W'_4}^0 & {W'_4}^0 \\ {W'_4}^0 & {W'_4}^1 & {W'_4}^2 & {W'_4}^3 \\ {W'_4}^0 & {W'_4}^2 & {W'_4}^4 & {W'_4}^6 \\ {W'_4}^0 & {W'_4}^3 & {W'_4}^6 & {W'_4}^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

となる。さらに、関係式 ${W'_4}^4 = 1$ と数値

$${W'_4}^0 = 1,\ {W'_4}^1 = i,\ {W'_4}^2 = -1,\ {W'_4}^3 = -i$$

を適用すると (離散フーリエ変換の W_N とは逆回転となることに注意)、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、離散フーリエ積分 x_n $(n = 0, 1, 2, 3)$ は、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

となる。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 2 点。