2007年度 離散数理 期末試験 (その1)

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1　周期 4 を持つ奇関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (-2 < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x \leq 2) \end{cases}$$

のフーリエ正弦級数を求めなさい。(20 点)

解答例　奇関数であることに注意すると、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 -x^2\cdot\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx \qquad (\because L=2) \\
&= \left[-x^2\cdot\frac{2}{k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_0^2 - \int_0^2 (-x^2)'\cdot\frac{2}{k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi}{2}x\right)dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\left[x^2\cos\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2 - \int_0^2 (-2x)\cdot\frac{2}{k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi}{2}x\right)dx \\
&= \frac{2}{k\pi}(4\cos k\pi - 0) - \frac{4}{k\pi}\int_0^2 x\cos\frac{k\pi}{2}x\,dx \\
&= \frac{8}{k\pi}\cos k\pi - \frac{4}{k\pi}\left(\left[x\cdot\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2 - \int_0^2 x'\cdot\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\,dx\right) \\
&= \frac{8}{k\pi}\cos k\pi - \frac{8}{k^2\pi^2}\left(\left[x\sin\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2 - \int_0^2 \sin\frac{k\pi}{2}x\,dx\right) \\
&= \frac{8}{k\pi}\cos k\pi - \frac{8}{k^2\pi^2}\left((0-0) - \left[\frac{2}{k\pi}\cdot\left(-\cos\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_0^2\right) \qquad (\because \sin k\pi = 0) \\
&= \frac{8}{k\pi}\cos k\pi - \frac{16}{k^3\pi^3}\left[\cos\frac{k\pi}{2}x\right]_0^2 = \frac{8}{k\pi}\cos k\pi - \frac{16}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) \\
&= 8\,\frac{(k^2\pi^2-2)\cos k\pi + 2}{k^3\pi^3} = 8\,\frac{(k^2\pi^2-2)(-1)^k + 2}{k^3\pi^3} \qquad (\because \cos k\pi = (-1)^k)
\end{aligned}$$

となる $(k = 1, 2, 3, \cdots)$。したがって、周期 4 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 8\,\frac{(n^2\pi^2-2)(-1)^n + 2}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

となる。

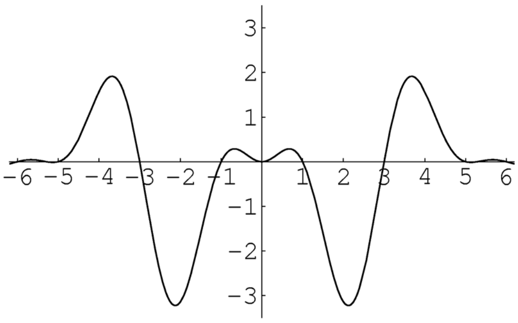
／20

2007 年度 離散数理 期末試験 (その 2)

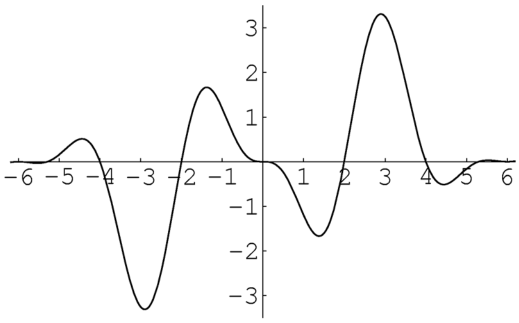
学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\textbf{問題 2}}$　周期 $T_0 = 0.5$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 0.5]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。(20 点)

$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(f)$



$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(f)$



周波数 f [Hz]	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	$\cdots$
$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(f)$	0	0	$-\pi$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\cdots$
$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(f)$	0	$\mp\frac{6}{5}$	0	$\pm\frac{114}{35}$	0	$\mp\frac{10}{63}$	0	$\cdots$

解答例　周期 $T_0 = 0.5$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{0.5} = 2$ [Hz] である。したがって、周波数が $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$ について調べれば十分である。$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波 $x(t)$ は、$f_1 = \pm 2$ [Hz] および $f_2 = \pm 4$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm 4\pi$ [rad/秒] および $\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 8\pi$ [rad/秒] の cos 波形の波を含み、これらの振幅は、

$$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(+2) + X_{T_0}(-2) = (-\pi) + (-\pi) = -2\pi$$

および

$$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(+4) + X_{T_0}(-4) = \left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

となる。また、$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、周波数 f [Hz] が $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$ の各点で $\mathrm{Im}\, X_{T_0}(f) = 0$ であるから、ある波 $x(t)$ に sin 波形の波は含まれない。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -2\pi \cos 4\pi t + \pi \cos 8\pi t$$

である。

$\boxed{\quad\quad\quad / 20}$

2007 年度 離散数理 期末試験 (その 3)

学籍番号： ____________________　　氏名： ____________________

問題 3　ある波 $x(t)$ を 2 [秒] (区間 $[0,2]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ)

$$\{\ 0,\ -4,\ 0,\ 4\ \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。(20 点)

解答例　$T_0 = 2$ より、周波数分解能 $\Delta f = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2} = 0.5$ [Hz] である。さらに、$N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0}\left(\frac{T_0}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n {W_N}^{nk}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x_n {W_4}^{nk} \qquad (k = 0,1,2,3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{T_0}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 & {W_4}^0 \\ {W_4}^0 & {W_4}^1 & {W_4}^2 & {W_4}^3 \\ {W_4}^0 & {W_4}^2 & {W_4}^0 & {W_4}^2 \\ {W_4}^0 & {W_4}^3 & {W_4}^2 & {W_4}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (\because W_4 = e^{-i\frac{2\pi}{4}})$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ i8 \\ 0 \\ -i8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i2 \\ 0 \\ -i2 \end{pmatrix}$$

となる。$X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-0.5	0	0.5	1.0
$\mathrm{Re}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0
$\mathrm{Im}\, X_{T_0}(k\Delta f)$	-2	0	2	0

表より、ある波 $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = k\Delta f = \pm 0.5$ [Hz]) の sin 波形の波であることがわかる。なお、sin 波形の波の振幅は、

$$-\mathrm{Im}\, X_{T_0}(0.5) + \mathrm{Im}\, X_{T_0}(-0.5) = -(2) + (-2) = -4$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = -4\sin \pi t$$

である。

/20