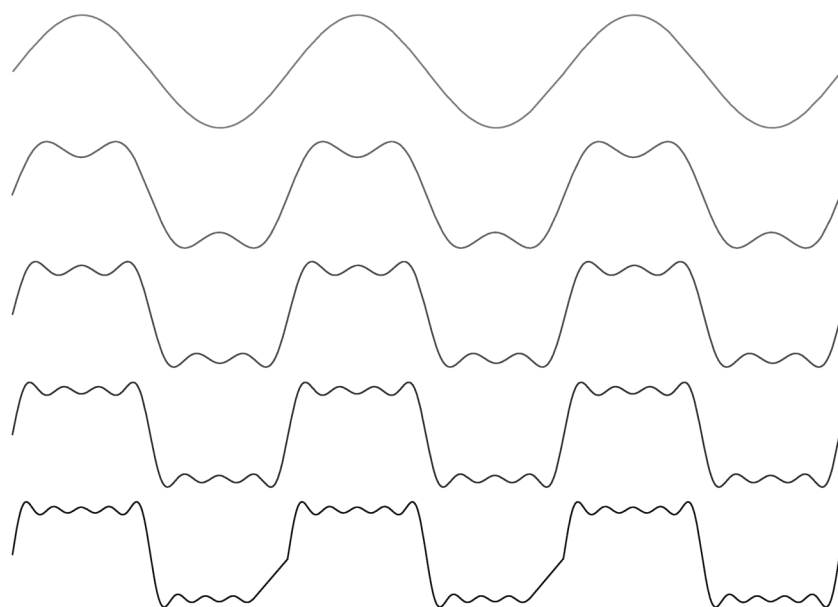


離散数理 テキスト

～ フーリエ変換で音声を加工してみよう! ～

幸山 直人 著



インターネット公開版

富山大学 理学部 数学教室

商標

- Mathematica は Wolfram Research, Inc. の登録商標です。
- Windows は Microsoft Corporation の登録商標です。

本テキストの著作権について

本テキストの一部または全部を著作権法の定める範囲を超え、許可なく、複写・転載・複製・テーブル化・ファイルに落とすことを禁じます。ただし、本テキストの表紙に「インターネット公開版」¹と記載してあるものについては、個人的な利用に限り、一部または全部の内容を改変することなく、再配布・複写・複製・ファイルに落とすことを許可します。

¹本テキストの「インターネット公開版」は、ホームページ等で公開すると著作権法に違反する可能性のある情報を取り除いたものです。

まえがき

近代における応用解析は、微積分の延長となる微分方程式・複素解析・フーリエ解析の3つが中心となっています。本テキストでは、その中のフーリエ解析 (フーリエ変換を使って解析すること) について述べた入門書となっています。

フーリエ変換の誕生は、フランスの数理物理学者 **フーリエ**²が「任意の関数は正弦波 (sin) と余弦波 (cos) で表すことができる」と主張したことに始まります³。現在では、コンピュータの登場と相まって、ありとあらゆる情報 (信号) の解析や加工にフーリエ変換が利用されています。具体的なフーリエ変換の活躍についてはテキストの中で追々述べることにします。

テキストの内容は以下のようになっています。

- 第1章：波 (周期関数) に関する基本的用語および性質について解説します。さらに、フーリエ級数展開やフーリエ変換に必要な知識として、三角関数と複素解析学の演算および公理を復習します。
- 第2章：連続な周期関数をフーリエ級数展開する方法を学習します。また、フーリエ係数が収束し、元の関数に一致することを証明します。
- 第3章：周期関数を周期を持たない連続関数まで拡張し、そのフーリエ級数展開を学びます (これをフーリエ変換という)。さらに、逆フーリエ変換について学び、「時間領域」表現と「周波数領域」表現の相互変換について学びます。
- 第4章：連続関数などからサンプリングされた離散データを (離散) フーリエ変換する方法について学習します。さらに、高速フーリエ変換 (FFT) と呼ばれるコンピュータに適したフーリエ変換について学習します。
- 第5章：第4章で学習した高速フーリエ変換を用いて、実際にサンプリングした音声の解析と加工を行なってもらいます (数式処理ソフト Mathematica を使用します)。

最後に、フーリエ変換が現代社会に欠かせない理論であり、技術であることを認識していただけると非常にうれしく思います。

2007年4月11日 幸山 直人

²フルネームは Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier (ジャン バティストゥ ジョゼフ バロン ドゥ フーリエ)、1768年3月21日生～1830年5月16日没。フーリエは、ある金属の1点に熱を与えたときその温度の移り変わりがあたかも無数の波の重ね合わせのように振舞うことをヒントに、「任意の関数は正弦波 (sin) と余弦波 (cos) で表される」と主張し、熱伝導を表す偏微分方程式を様々な境界条件の下で解きました。

³当時は産業革命の真っ只中で、蒸気機関を中心とする熱機関の研究が盛んに行なわれていました。フーリエ変換の誕生によって、熱伝導が理論的に研究され、熱機関の設計に大いに役立つなど近代社会の発展に大きく貢献しました。

情報処理技術者試験について

情報処理技術者試験は「情報処理の促進に関する法律」に基づく国家試験で、社会の認知度も高く、非常に人気のある試験です。試験は春(4月の第3日曜日)と秋(10月の第3日曜日)に実施され、試験区分には「初級システムアドミニストレータ試験」や「基本情報技術者試験」などがあります。

学生のみなさまには、就職活動が始まるまでに「基本情報技術者試験」に合格しておくことをお勧めします。これらの試験に合格することで、情報化社会に適応できるバランスの取れた人材であることを社会に対してアピールしましょう(個人情報保護法などの施行に伴い、企業や公務員の一般常識として情報に関する問題が出題されるようになりました)。

そのためには、コンピュータなどの情報機器に対して偏見を持つのではなく、情報処理に関する基礎的な知識や技術をしっかり習得した上で、コンピュータや携帯電話などを上手(正しく効率的)に使えるようになることが大切です。

また、正しい知識を習得することで、最近急増している情報に関する事件や事故に巻き込まれたり、知らず知らずの間に犯罪の被害者や加害者になってしまうことを未然に防ぐことが出来るようになります。

この機会に、チャレンジしてみても如何でしょうか。

情報処理推進機構 情報処理技術者試験センターのホームページ：

<http://www.jitec.jp/>

幸山研究室 情報処理技術者試験案内のページ：

<http://kouyama.math.u-toyama.ac.jp/main/computer/personal.htm>

目次

まえがき	III
第1章 波	1
1.1 周期関数と三角関数	1
1.2 波としての三角関数	7
1.3 直交座標表示と極座標表示	13
第2章 フーリエ級数	23
2.1 直交関数系とフーリエ級数	23
2.2 複素フーリエ級数	30
2.3 フーリエ級数展開	33
2.3.1 周期 2π を持つ関数のフーリエ級数展開	34
2.3.2 周期 $2L$ を持つ関数のフーリエ級数展開	43
2.4 フーリエ級数の収束	49
第3章 フーリエ変換	61
3.1 フーリエ積分とフーリエ変換	61
3.2 フーリエ積分の収束	74
3.3 波のフーリエ変換	78
3.3.1 $\cos$ 波形の波のフーリエ変換	79
3.3.2 $\sin$ 波形の波のフーリエ変換	82
3.3.3 周期 T_0 を持つ波のフーリエ変換	84
3.3.4 合成された波のフーリエ変換	86
3.3.5 初期位相を持つ波のフーリエ変換	90
第4章 離散フーリエ変換	95
4.1 離散フーリエ変換	95
4.2 離散フーリエ積分	111
4.3 高速フーリエ変換	114
第5章 音声を加工してみよう!	121
5.1 Mathematica の離散フーリエ変換	121
5.2 サンプリング	123
5.3 音声を加工してみよう!	129

5.3.1	音の主成分	130
5.3.2	ノイズ除去	133
5.3.3	ボイスチェンジャー	136
参考文献		139
索引		140

第1章 波

1.1 周期関数と三角関数

関数 (波) の中には、図 1.1 のように一定の間隔で同じ波形を繰り返す関数があります。このような関数を**周期関数**と呼び、これら周期関数が持つ一定の間隔を**周期**と呼びます¹。このテキストでは、時間 t [秒] に得られた信号値 $x(t)$ の関数をフーリエ変換の対象として扱います。したがって、登場する全ての関数が1変数関数であることに注意し、以後の内容を読み進めて下さい。

定義 1 関数 $x(t)$ が

$$x(t + T) = x(t)$$

を満たすとき、関数 $x(t)$ は周期関数である。ただし、 T は周期関数 $x(t)$ の周期とする。

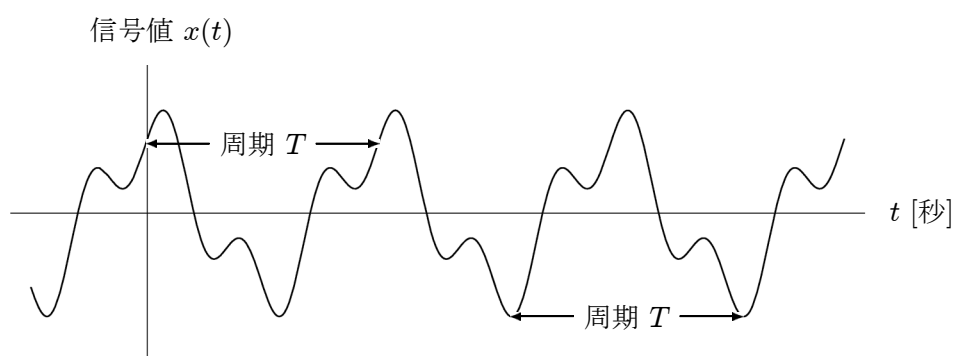


図 1.1: 周期関数の例

¹第3章では、周期関数にとどまらず、多くの一般的な関数についてフーリエ級数展開できることを述べます。

まず最初に、周期関数を扱うにあたって**周期**と**周波数**の重要な関係について述べておきます。**周波数**は、1秒間に含まれる同じ波形の波の個数で、記号 f [Hz] (または [回転/秒]) で表します²。いま、周期関数の周期³を記号 T [秒] で表せば、周波数 f [Hz] は周期 T [秒] の逆数

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]}$$

によって得られます。逆に、周期 T [秒] は周波数 f [Hz] の逆数

$$T = \frac{1}{f} \text{ [秒]}$$

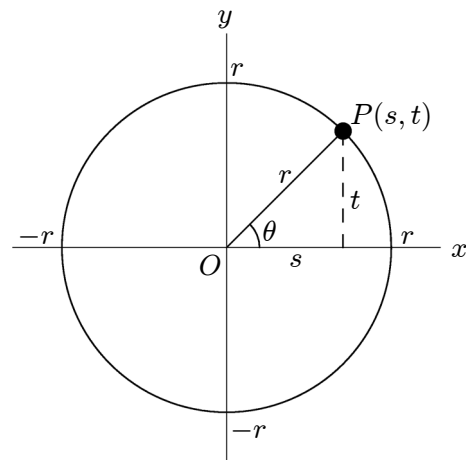
によって得られます。これらは、周期関数にとって最も重要な関係式なので覚えておきましょう。なお、このテキストでは、一貫して、記号 T [秒] は周期を、記号 f [Hz] は周波数を、それぞれ表します。

私たちにとって最も身近な周期関数は、**三角関数**と呼ばれ、角 θ [rad] を変数とする⁴

- $\sin \theta$ (**sine**; **正弦**),
- $\cos \theta$ (**cosine**; **余弦**),
- $\tan \theta$ (**tangent**; **正接**)

の3つの関数です。周期は、 $\sin \theta$ および $\cos \theta$ がそれぞれ 2π [rad]、 $\tan \theta$ が π [rad] です。もちろん、これらの関数は、右下の図のように xy 平面上に点 $P(s, t)$ を与えたとき、

- $\sin \theta = \frac{t}{r} \quad \left(\theta = \arcsin \frac{t}{r} \right),$
- $\cos \theta = \frac{s}{r} \quad \left(\theta = \arccos \frac{s}{r} \right),$
- $\tan \theta = \frac{t}{s} \quad \left(\theta = \arctan \frac{t}{s} = \tan^{-1} \frac{t}{s} \right),$
- $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{s} \leftarrow \text{正割 (secant)},$
- $\csc \theta = \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{t} \leftarrow \text{余割 (cosecant)},$
- $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{s}{t} \leftarrow \text{余接 (cotangent)}$



によって定義されます⁵ (角 θ [rad] は、点 P の**偏角** (argument) とも呼ばれます)。また、定義より、三角関数の基本的な性質

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

²1968年、ドイツの物理学者 H. R. Hertz (ヘルツ) にちなんで、周波数を表す単位に「Hz (ヘルツ)」が正式採用されました。それ以前は「cycle (サイクル)」が使用されていました。

³周期は1周期 (1回転) あたりの時間を表すので、周期の正確な単位は [秒/回転] となります。

⁴三角関数の角の表記方法には、[rad] (ラジアン; **radian**) という単位で表す**弧度法**を用います。なお、高校で習う角の表記方法は、[°] (度) を単位とする**60分法**と呼ばれるものです。弧度法と60分法には π [rad] = 180 [°] なる相互関係があります。

⁵「arc」は「弧」という意味で、例えば $\arcsin y$ は $y = \sin \theta$ を満たす弧の長さ θ を表します。

も導かれます。補足として、三角関数のグラフを図 1.2 に、三角関数の代表的な値を表 1.1 に、それぞれ挙げておきます (復習を兼ねて、表 1.1 の空欄を埋めてみましょう)。

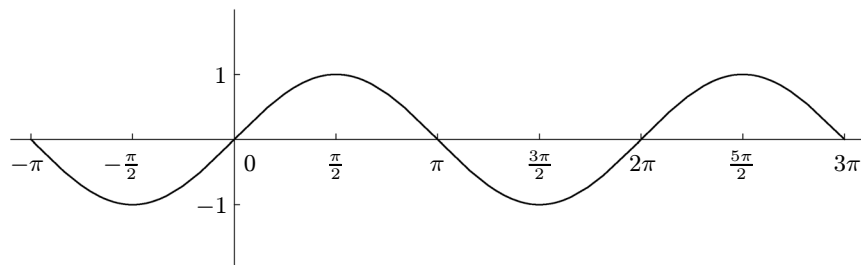
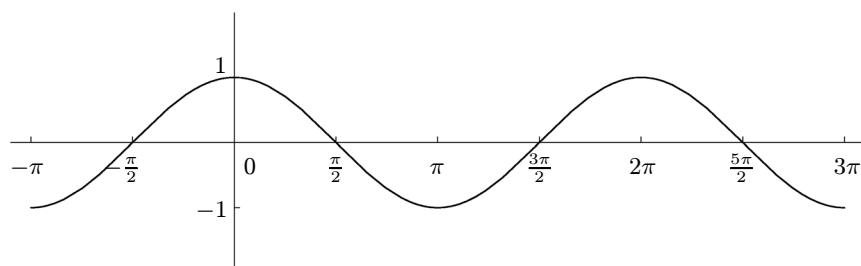
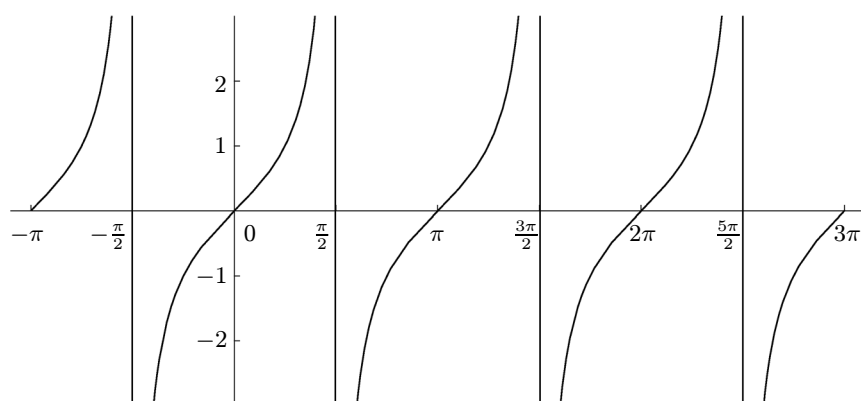
 $\sin \theta$

 $\cos \theta$

 $\tan \theta$


図 1.2: 三角関数のグラフ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	-1				0				1				0	-1	0
$\cos \theta$	0				1				0				-1	0	1
$\tan \theta$	$\pm\infty$				0				$\pm\infty$				0	$\pm\infty$	0

表 1.1: 三角関数の代表的な値

復習を兼ね、三角関数の性質について列挙しておきます。まず、三角関数は周期関数ですから、周期関数の定義より、関係式

$$\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi), \quad \cos \theta = \cos(\theta + 2\pi), \quad \tan \theta = \tan(\theta + \pi)$$

が成り立ちます。このことより、次の定理を得ます。

定理 1.1 n が整数のとき、三角関数について以下の関係が成り立つ。

(1) $\sin \theta = \sin(\theta + 2n\pi).$

(2) $\cos \theta = \cos(\theta + 2n\pi).$

(3) $\tan \theta = \tan(\theta + n\pi).$

また、三角関数の性質から、次の定理が成り立ちます。

定理 1.2 三角関数について以下の関係が成り立つ。

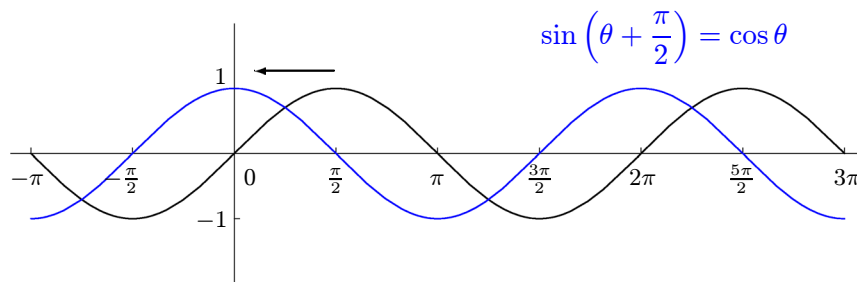
(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta.$

(2) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta.$

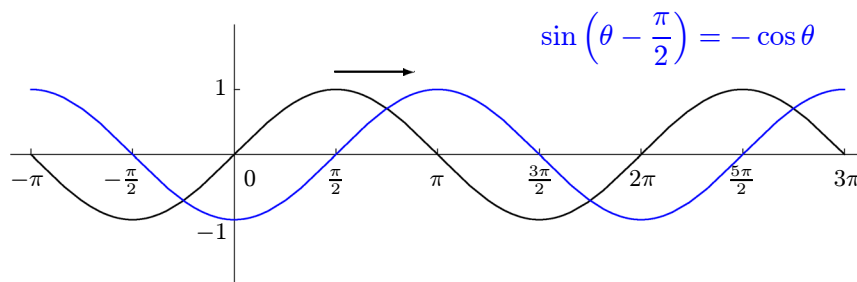
(3) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta.$

(4) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta.$

定理 1.2 の (1) の $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ は、 $\sin \theta$ のグラフを横軸に $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ左に平行移動したもので、このグラフは $\cos \theta$ のグラフに一致します (下図)。



同様に、定理 1.2 の (2) の $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ は、 $\sin \theta$ のグラフを横軸に $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ右に平行移動したもので、このグラフは $-\cos \theta$ のグラフに一致します (下図)。



任意の角 α, β [rad] に対して、次の定理が成り立ちます。

定理 1.3 (加法定理) 三角関数について以下の関係が成り立つ。

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

さらに、定理 1.3 より、次の定理を得ます。

定理 1.4 三角関数について以下の関係が成り立つ。

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)).$$

$$(3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$(4) \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)).$$

その他にも、**半角の公式**、**倍角の公式**、**3倍角の公式**、…などが導かれます。また、定理 1.3 の加法定理を用いると、三角関数の合成を行なうことができます。 A, B を実数の定数とすれば、関数 $A \sin \alpha + B \cos \alpha$ は、

$$\begin{aligned} & A \sin \alpha + B \cos \alpha \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

と変形できるので、右図より

$$\cos \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

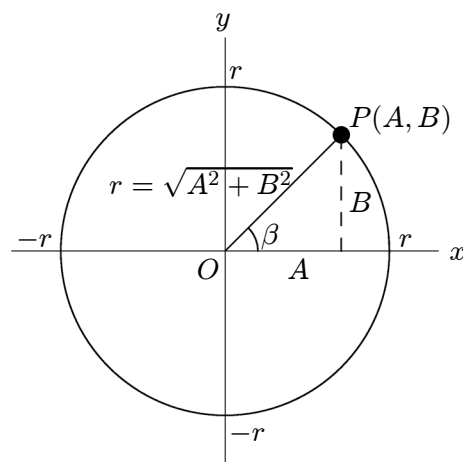
とおくと、あらためて

$$(\text{与式}) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha)$$

と書き表せます。右辺の $\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha$ は、定理 1.3 の (1) の右辺に一致することから、

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \beta)$$

という関係式が得られます。



この節の締めくくりとして、三角関数の対称性について見ておきましょう。

定義 2

- (1) 関数 $x(t)$ が $x(-t) = -x(t)$ を満たすとき、関数 $x(t)$ は**奇関数**であるという。
- (2) 関数 $x(t)$ が $x(-t) = x(t)$ を満たすとき、関数 $x(t)$ は**偶関数**であるという。

定義より、三角関数の対称性は以下のようになります。

- $\sin \theta$ は奇関数である ($\because \sin(-\theta) = -\sin \theta$)。
- $\cos \theta$ は偶関数である ($\because \cos(-\theta) = \cos \theta$)。
- $\tan \theta$ は奇関数である ($\because \tan(-\theta) = -\tan \theta$)。

なお、これまでに挙げた三角関数の性質や関係式が、これから学ぶフーリエ級数展開やフーリエ変換にとって、非常に重要であることを付け加えておきます。

1.2 波としての三角関数

最初にも述べたように、このテキストでは時間 t [秒] における信号値 $x(t)$ の関数を扱います。したがって、周期関数の中で最も基本的な三角関数を、時間 t [秒] における信号値 $x(t)$ の関数に書き換えましょう。すなわち、三角関数を物理的な波として捉え直しましょう⁶。結論から述べれば、三角関数 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は、時間 t [秒] を変数とする関数 (信号値)

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{と} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

に書き換えられます。なお、前者を **sin 波形** の関数、後者を **cos 波形** の関数といい、三角関数の関係 (定理 1.2) を用いて相互に書き換えることができます。

まず、 $\phi = 0$ とした関数

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A \cos(\omega t)$$

について考察しましょう。三角関数の変数 θ [rad] は弧度法による表記でしたから、

$$\theta = \omega t \text{ [rad]}$$

の関係が成り立ちます。記号 t [秒] の単位を考慮すれば、

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ [rad/秒]}$$

となります。これは、距離 (θ) と時間 (t) と速度 (ω) の関係に似ていて、 ω は **角速度** と呼ばれます (通常、記号 ω が使用されます)。また、記号 A は **振幅** と呼ばれ、sin 波形および cos 波形の **波の大きさ** (振動する幅) を表します。言い換えれば、関数

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A \cos(\omega t)$$

は、図 1.3 のように半径 A の円周上を角速度 ω [rad] で回転する点を観測したものといえます。

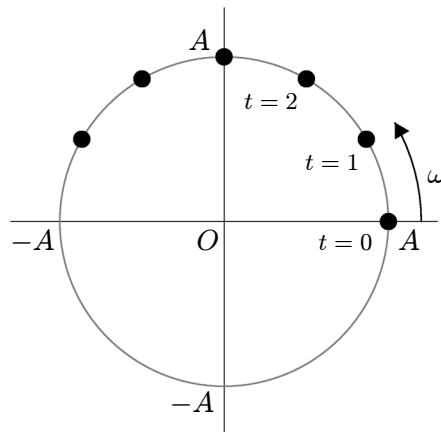


図 1.3: 円周上を点が回転している様子

⁶例えば、岸壁に打ち寄せる波の高低を観測している様子を想像してください。

より詳しく述べれば、 $x(t) = A \sin(\omega t)$ のグラフは回転する点を縦軸に射影したもの (位置) を時系列に並べたもので、 $x(t) = A \cos(\omega t)$ のグラフは回転する点を横軸に射影したもの (位置) を時系列に並べたものです (図 1.4)。

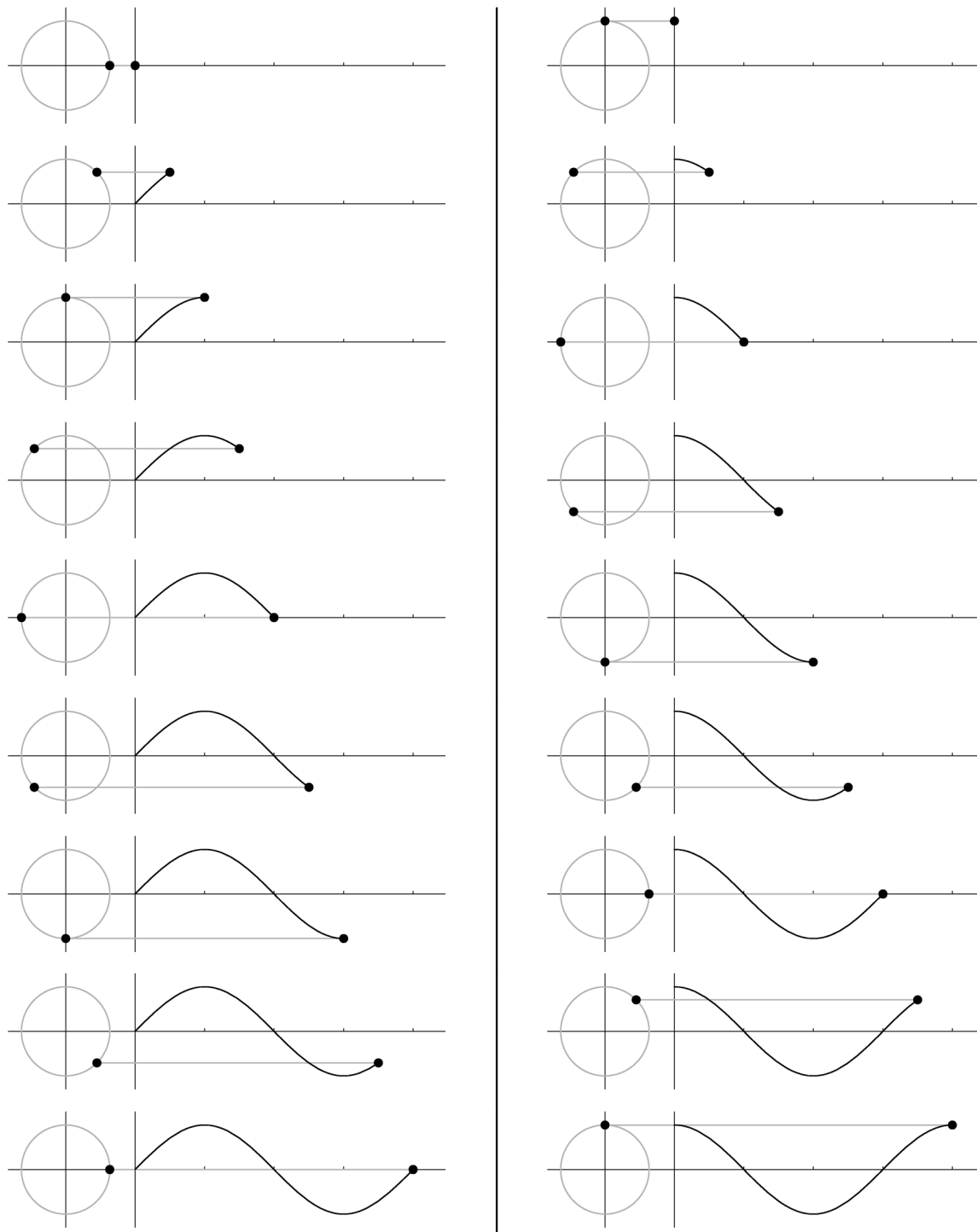
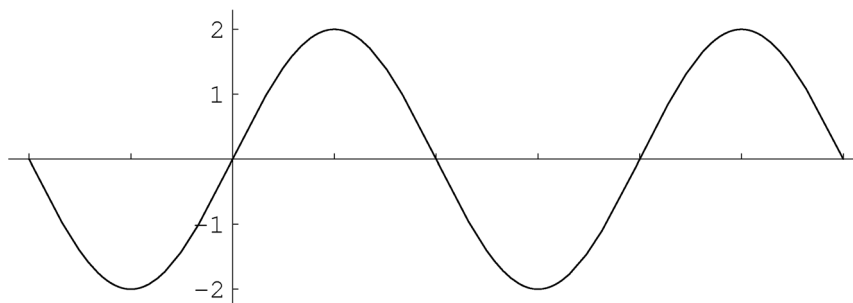


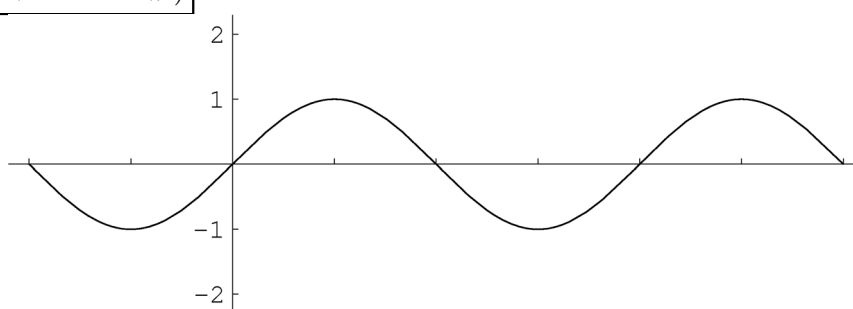
図 1.4: 回転する点と信号値 $x(t)$ の関係

振幅 A の違いによる $\sin$ 波形の関数を比較しておきましょう (図 1.5)。

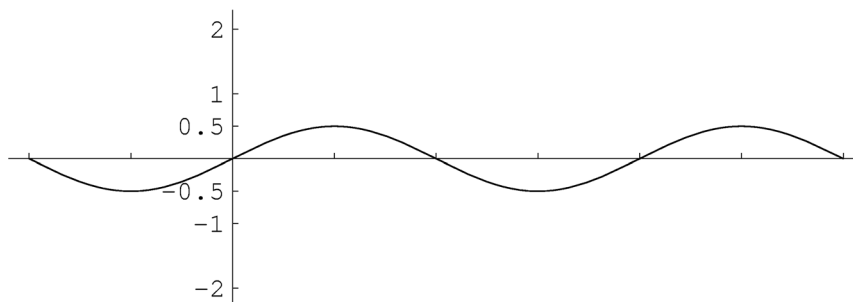
$A = 2$ の場合



$A = 1$ の場合 (基準となる振幅)



$A = 0.5$ の場合



$A = -1 (< 0)$ の場合

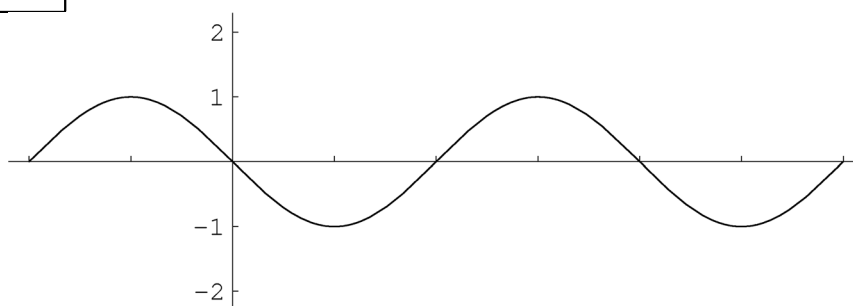
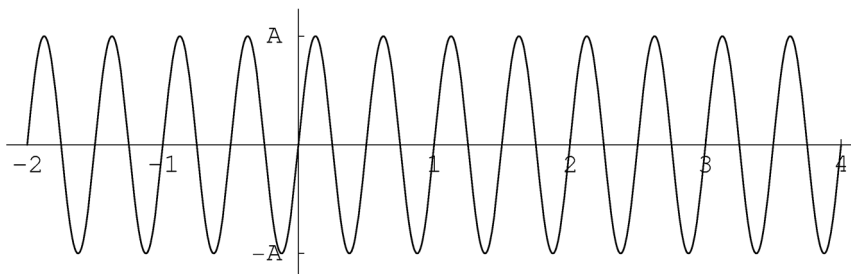


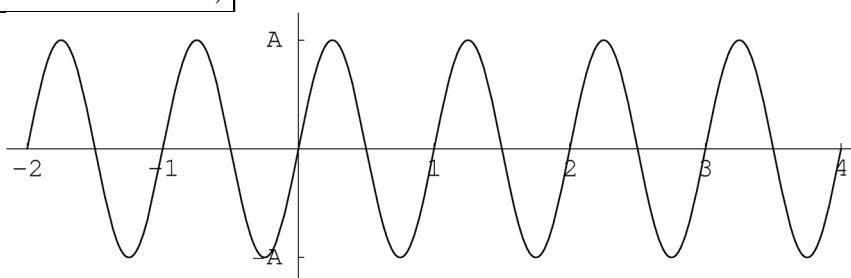
図 1.5: 振幅の違いによる波形の比較

角速度 ω [rad/秒] の違いによる $\sin$ 波形の関数を比較しておきましょう (図 1.6)。

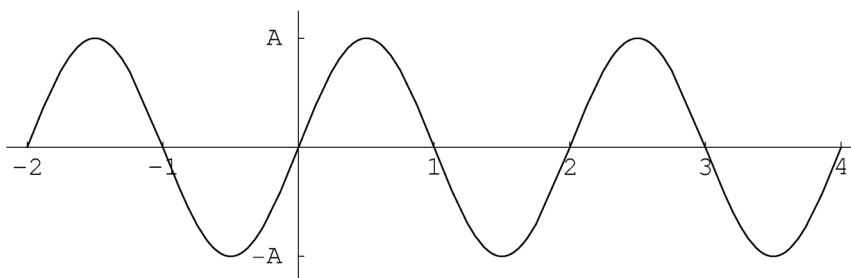
$\omega = 4\pi$ の場合



$\omega = 2\pi$ の場合 (基準となる角速度)



$\omega = \pi$ の場合



$\omega = -2\pi$ (< 0) の場合

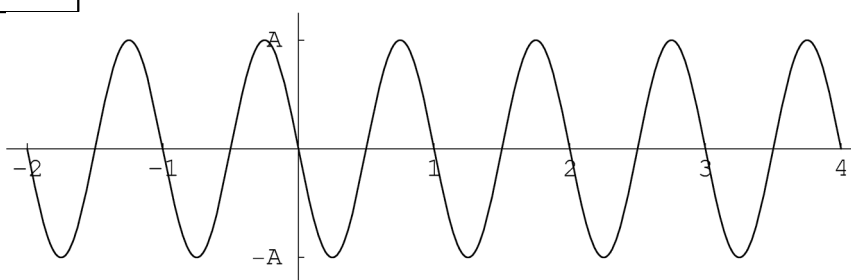


図 1.6: 角速度の違いによる波形の比較

ここで注意していただきたいのは、三角関数を波として捉える場合は、図 1.6 のように角速度 ω [rad/秒] に π を含む数値が選ばれていることです。なぜなら、 $\sin$ 波形や $\cos$ 波形の関数に対して、時間 t [秒] に $0, 1, 2, \dots$ の整数値を与えたとき、その信号値 $x(t)$ が表 1.1 の三角関数の代表値を取り、数値的に扱い易くなるからです (数学的にはどのように選んでも全く問題ありません)。

また、図 1.6 のグラフから次の関係が得られます。例えば、角速度 $\omega = 4\pi$ [rad/秒] の場合、1 秒間に 2 つの波を含むことから周期 $T = 0.5$ [秒] と周波数 $f = 2$ [Hz] が読み取れます。さらに、角が 1 [Hz] あたり 2π [rad] 進むことに注意すれば、1 秒間に進んだ角は、関係

$$\begin{aligned} 4\pi \text{ [rad/秒]} \times 1 \text{ [秒]} &= 2\pi \text{ [rad/Hz]} \times 2 \text{ [Hz]} \\ \iff \omega \text{ [rad/秒]} \times 1 \text{ [秒]} &= 2\pi \text{ [rad/Hz]} \times f \text{ [Hz]} \end{aligned}$$

を満たします。したがって、関係

$$\omega = 2\pi f$$

が得られます。周期 T [秒] と周波数 f [Hz] の関係 $f = \frac{1}{T}$ を用いれば、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

という関係も得られます (1 周期 (回転) に進む角 2π [rad] を、掛かった時間 (周期) T [秒] で割れば、角速度 ω [rad/秒] が求められます)。これらの関係から関数を

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(2\pi ft), & x(t) &= A \cos(2\pi ft), \\ x(t) &= A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & x(t) &= A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

と表すことも度々あります。上記の 2 つの関係

$$\omega = 2\pi f \quad \text{と} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

は、非常に重要なので理解して (覚えて) おきましょう。

さて、関数

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A \cos(\omega t)$$

については理解できたので、最終的な関数

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{と} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

について考察して行きましょう。理解しやすいように、ここでは $\sin$ 波形の関数にしぼって話を進めます ($\cos$ 波形の関数についても同様の考察を行なうことができます)。関数を数学的に見れば

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin\left(\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)$$

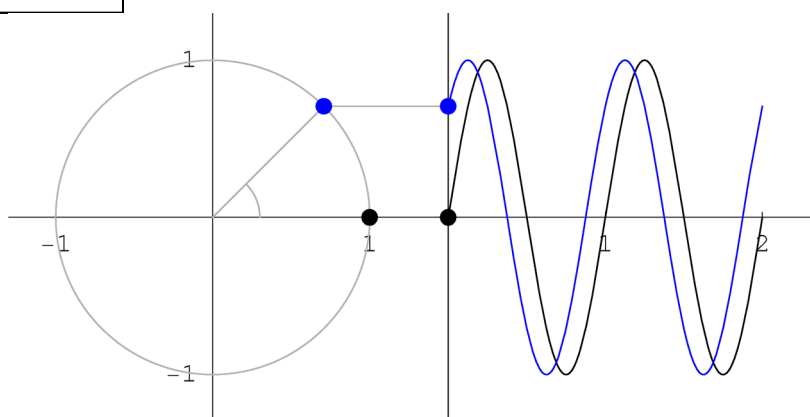
と変形できますから、 $t' = t + \frac{\phi}{\omega}$ とおけば、

$$x\left(t' - \frac{\phi}{\omega}\right) = A \sin(\omega t')$$

と書き換えられます。したがって、関数 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ は関数 $x(t) = A \sin(\omega t)$ を左右 (横軸方向) に平行移動した関数として捉えることができます。このような ϕ を、波の世界では**初期位相**と呼びます。単位は [rad] です。なお、 $\frac{\phi \text{ [rad]}}{\omega \text{ [rad/秒]}}$ の単位が [秒] となることにも注意しておきましょう。

それでは、具体的に関数のグラフを描くことで、関数 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ について理解を深めましょう。振幅 $A = 1$, 角速度 $\omega = 2\pi$ [rad/秒] として、初期位相 $\phi = \frac{\pi}{4}$ [rad] と初期位相 $\phi = -\frac{\pi}{4}$ [rad] のグラフをそれぞれ描くと図 1.7 のようになり、関数 $x(t) = \sin(2\pi t)$ のグラフをそれぞれ、左に 0.125 [秒]、右に 0.125 [秒]、平行移動したグラフとなります ($|\phi|/\omega = 0.125$ [秒])。

$\phi = \frac{\pi}{4} (> 0)$ の場合



$\phi = -\frac{\pi}{4} (< 0)$ の場合

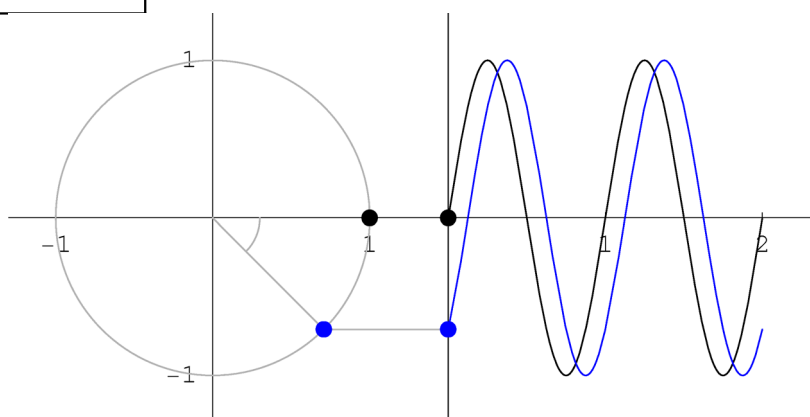


図 1.7: 初期位相の違いによる波形の比較

波の世界では、 $\phi > 0$ のとき、関数 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ は、

「関数 $x(t) = A \sin(\omega t)$ の位相を $|\phi|$ [rad] 進めた波形である」または

「関数 $x(t) = A \sin(\omega t)$ の時間を $|\phi|/\omega$ [秒] 進めた波形である」

といいます。逆に、 $\phi < 0$ のとき、関数 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ は、

「関数 $x(t) = A \sin(\omega t)$ の位相を $|\phi|$ [rad] 遅らせた波形である」または

「関数 $x(t) = A \sin(\omega t)$ の時間を $|\phi|/\omega$ [秒] 遅らせた波形である」

といいます。なお、グラフが時間 t [秒] を変数とする関数であることに注意しましょう⁷。位相を考えると、円周上を回転する点を思い浮かべるとよいでしょう。

⁷ グラフだけ見ってしまうと波が遅れている (または進んでいる) ように感じられますが、それは逆です。

1.3 直交座標表示と極座標表示

平面 (x - y 平面) と複素平面⁸を自然に対応させると、図 1.8 のように、平面上の任意の点 P の座標 (x, y) は、複素平面上の座標

$$z = x + iy$$

に対応し、複素数で表されます。ただし、 $i (= \sqrt{-1})$ は虚数単位を表し、 $i^2 = -1$ を満たします⁹。このような表示方法を直交座標表示と呼びます。さらに、複素数 (複素平面上の座標) $z = x + iy$ に対して、 x を実部 (Real part)、 y を虚部 (Imaginary part) と呼び、それぞれ、

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{と} \quad y = \operatorname{Im} z$$

で表します。また、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\bar{z}$ は、

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

で定義され、実部 ($x = \operatorname{Re} z$) と虚部 ($y = \operatorname{Im} z$) は、それぞれ、

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{と} \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

となります。

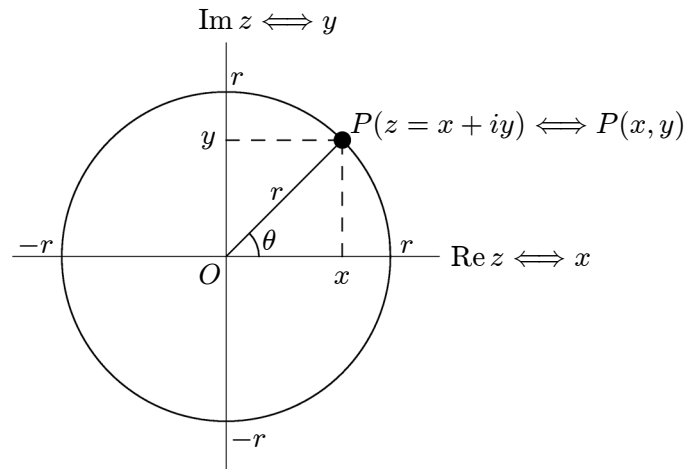


図 1.8: 直交座標表示と極座標表示

ここで、図 1.8 のように原点 O を中心として点 $P(z)$ を通る円を描くと、原点 O から点 P までの距離 r は、

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z} \quad \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

⁸ガウス (Gauss) 平面とも呼ばれます。

⁹フーリエ変換を取り扱った工学書では、 i は総計 (合計) などの変数として使われるため、 j が虚数単位に使用されます。

を計算することで得られます。また、図 1.8 のように実軸 (横軸) と直線 OP の成す角を θ [rad] とおくと、成す角 θ [rad] は偏角 (argument) と呼ばれ、

$$\theta = \arg z \quad \left(\text{または } \theta = \arctan \frac{y}{x} \right)$$

を計算することで得られます (これらの計算方法については、後ほど具体例を挙げて詳しく説明します)。このとき、実部 x と虚部 y が、

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos \theta \quad \text{と} \quad y = \operatorname{Im} z = r \sin \theta$$

となることに注意すれば、点 P の座標 $z = x + iy$ は、

$$\begin{aligned} z = x + iy &= (r \cos \theta) + i(r \sin \theta) \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

と書き直すことができます。このような表示方法を (三角関数による) 極座標表示と呼びます。さらに付け加えておくと、上記の式の θ を $-\theta$ で置き換えたものは、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ となります。なぜなら、三角関数の対称性によって、

$$\begin{aligned} \bar{z} = x - iy &= (r \cos \theta) - i(r \sin \theta) \\ &= r(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= r((\cos \theta) + i(-\sin \theta)) \\ &= r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

となるからです (図 1.8 から容易に読み取れます)。

さて、微積分で学んだ関数 $f(x)$ のテイラー (Taylor) 展開は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \cdots \end{aligned}$$

でしたから、 $a = 0$ において、指数関数¹⁰ (exponential) e^x , 正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$ のテイラー展開を求めると

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \end{array} \right.$$

¹⁰自然対数の底 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \cdots$ の指数関数 e^x は、 $\exp x$ とも記述されます。また、 e はネピアの数とも呼ばれます。

となります。ここで、テイラー展開された指数関数 e^x に対して、両辺の x を ix で置き換えると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - i\frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

という関係式が得られます。これが、有名な**オイラー (Euler) の公式**「 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 」です。したがって、(三角関数による) 極座標表示された点 P の座標 (複素数) $z = x + iy$ は、オイラーの公式を用いて、

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

と書き直すことができます。同様に、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ は、複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の θ を $-\theta$ で置き換えた式と一致することに注意すれば、

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = re^{i(-\theta)} = re^{-i\theta}$$

と書き直すことができます。したがって、実部 x と虚部 y は

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} = r \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & (= r \cos \theta), \\ y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = r \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & (= r \sin \theta) \end{cases}$$

となります。以上より、三角関数と指数関数の重要な関係

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

が得られます。なお、極座標表示において、前者

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

のような表示方法を「三角関数による極座標表示」と呼び、後者

$$z = re^{i\theta}$$

のような表示方法を「指数関数による極座標表示」と呼ぶことにします。

その他にも、極座標表示では次のことが成り立ちます。まず、三角関数による極座標表示で iz を計算すると、

$$\begin{aligned} iz &= ir(\cos \theta + i \sin \theta) = r(i \cos \theta + i^2 \sin \theta) \\ &= r(i \cos \theta - \sin \theta) = r(-\sin \theta + i \cos \theta) \\ &= r \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (\because \text{定理 1.2}) \end{aligned}$$

となり、 iz は点 $P(z)$ から位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 進んだ点の座標であることがわかります。同様に、 $-iz$ を計算すると、

$$\begin{aligned} -iz &= -ir(\cos \theta + i \sin \theta) = r(-i \cos \theta + (-i^2) \sin \theta) \\ &= r(i(-\cos \theta) + \sin \theta) = r(\sin \theta + i(-\cos \theta)) \\ &= r \left(\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (\because \text{定理 1.2}) \end{aligned}$$

となり、 $-iz$ は点 $P(z)$ から位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れた点の座標であることがわかります。すなわち、 i を掛けることで位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 進み、 $-i$ を掛けることで位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れます。このことは、指数関数による極座標表示についても同じことが言えるので、

$$iz = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} (re^{i\theta}) \quad \text{と} \quad -iz = re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}} (re^{i\theta})$$

が成り立ち、関係式

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{と} \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

が得られます。これは、単位円周上 ($r = 1$) の座標 $1 + i0 = 1$ ($\theta = 0$ [rad]) に対して、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 進ませた座標が $0 + i1 = i$ で、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせた座標が $0 - i1 = -i$ であることを意味しています。したがって、実部 x と虚部 y は

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (re^{i\theta}) = \operatorname{Im} (i re^{i\theta}), \\ y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} (re^{i\theta}) = \operatorname{Re} (-i re^{i\theta}) \end{cases}$$

と表すことができます。すなわち、波の世界に戻れば、 $\cos$ 波形の関数 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ と $\sin$ 波形の関数 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ は円周上を回る点の実軸 (横軸) と虚軸 (縦軸) への射影でしたから、指数関数による極座標表示 $re^{i\theta}$ を用いて

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} (Ae^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Im} (iAe^{i(\omega t + \phi)}), \\ x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = \operatorname{Im} (Ae^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Re} (-iAe^{i(\omega t + \phi)}) \end{cases}$$

と表されます。ただし、 r は A で、 θ は $\omega t + \phi$ で、それぞれ置き換えてあります。

以後、円周上を回る点の実軸（横軸）への射影を信号値 $x(t)$ とし、Re を省略して、指数関数による極座標表示を用いた cos 波形の関数を

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A e^{i(\omega t + \phi)}$$

と記述し、sin 波形の関数を

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = -i A e^{i(\omega t + \phi)}$$

と記述します¹¹。sin 波形の関数は、cos 波形の関数の位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れた関数として扱うことに注意しましょう。

話を元に戻して、先ほど求めた重要な関係式

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

が持つ意味について考察しておきましょう。まず、 $\cos \theta$ の式を

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} e^{i(-\theta)}$$

と変形し、 $\frac{1}{2} e^{i\theta}$ と $\frac{1}{2} e^{i(-\theta)}$ を複素平面上の 2 つのベクトルと考えます。この 2 つのベクトルの合成ベクトルの座標は、図 1.10 のように実軸上の座標となり、 $\cos \theta$ の値と一致します。言い換えれば、これまでは図 1.9 のように円周上を回転する点の実軸への像として $\cos \theta$ の値を表したのに対して、 $\frac{1}{2} e^{i\theta}$ と $\frac{1}{2} e^{i(-\theta)}$ の 2 つのベクトルの合成ベクトルは、実軸上を振動する点となり、点の座標（数式）そのもので $\cos \theta$ の値を表すことができます。

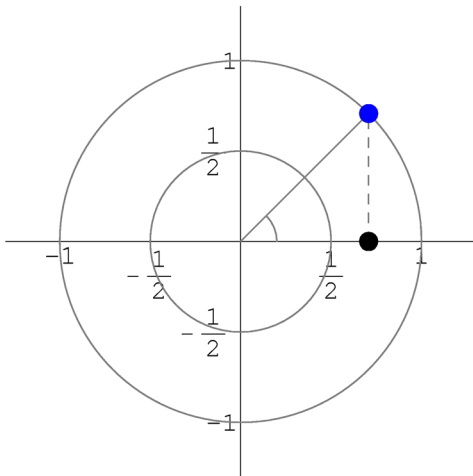


図 1.9: 像として $(\cos \theta)$

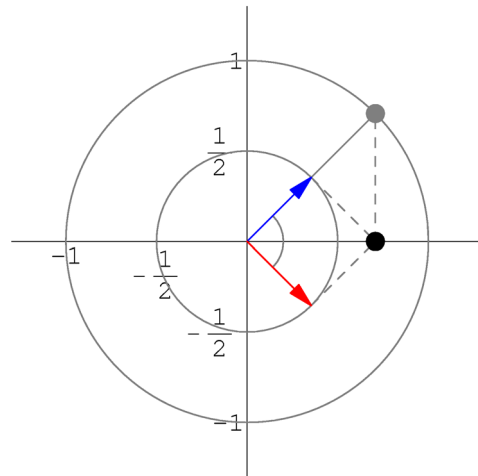


図 1.10: 合成ベクトルとして $(\cos \theta)$

¹¹フーリエ変換を扱った他の書籍でも標準的に用いられている表記方法なので、この表記方法に慣れてください。

同様に、 $\sin \theta$ の式を

$$\sin \theta = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = -i \left(\frac{1}{2} e^{i\theta} + \left(-\frac{1}{2} e^{i(-\theta)} \right) \right)$$

と変形し、 $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ と $-\frac{1}{2}e^{i(-\theta)}$ を複素平面上の2つのベクトルと考えます。この2つのベクトルの合成ベクトルの座標は、図 1.12 のように虚軸上の座標となります。ここで、 $-i$ を掛けることが位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせることに注意すれば、残しておいた $-i$ を掛けることによって実軸上の座標となり、 $\sin \theta$ の値と一致します (虚数 $0 + iy$ に対して実数 $-i \cdot (0 + iy) = 1 \cdot y = y$ となります)。すなわち、 $\cos \theta$ の場合と同様に、これまでは図 1.11 のように円周上を回転する点の虚軸への像として $\sin \theta$ の値を表したのに対して、 $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ と $-\frac{1}{2}e^{i(-\theta)}$ の2つのベクトルの合成ベクトルは、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせることで、実軸上を振動する点となり、点の座標 (数式) そのもので $\sin \theta$ の値を表すことができます。このように、 $\cos$ 波形の関数や $\sin$ 波形の関数を2つのベクトルの合成ベクトルとして考えることは、第 2.2 節の複素フーリエ級数やその後の複素フーリエ展開を学ぶ上で非常に重要な役割を果たします。

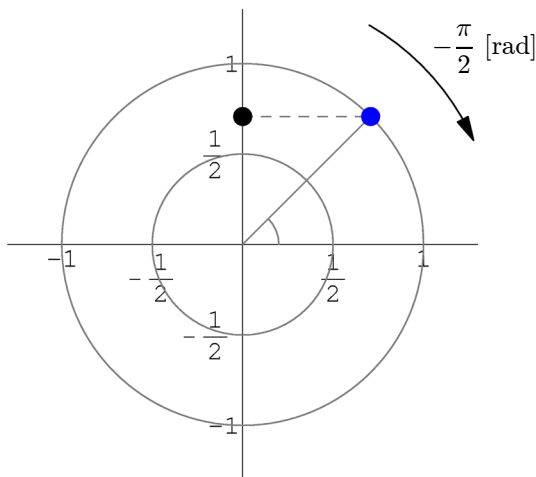


図 1.11: 像として ($\sin \theta$)

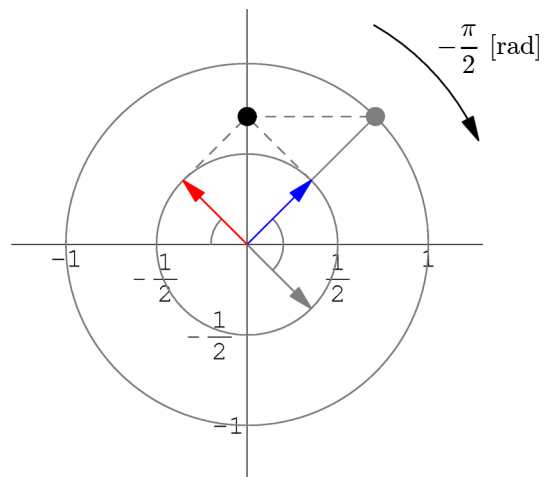


図 1.12: 合成ベクトルとして ($\sin \theta$)

この節の最後に、具体例を挙げ、実際に直交座標表示・三角関数による極座標表示・指数関数による極座標表示の相互変換と四則演算の練習をしておきましょう。これは、第 4 章で学ぶ離散フーリエ変換¹²の計算を行う上で重要となります (これを知らないと、計算が大変です)。例として、平面 (複素平面) 上の 2 点

$$P(2, 2) \quad (= P(x_1, y_1)) \quad \text{と} \quad Q(-1, \sqrt{3}) \quad (= Q(x_2, y_2))$$

について相互変換と四則演算を行なってみましょう (図 1.13 参照)。

¹²離散的な数値列を波と解釈してフーリエ変換を行ないます。そのため、コンピュータ上でフーリエ変換を計算させることに適した方法です。

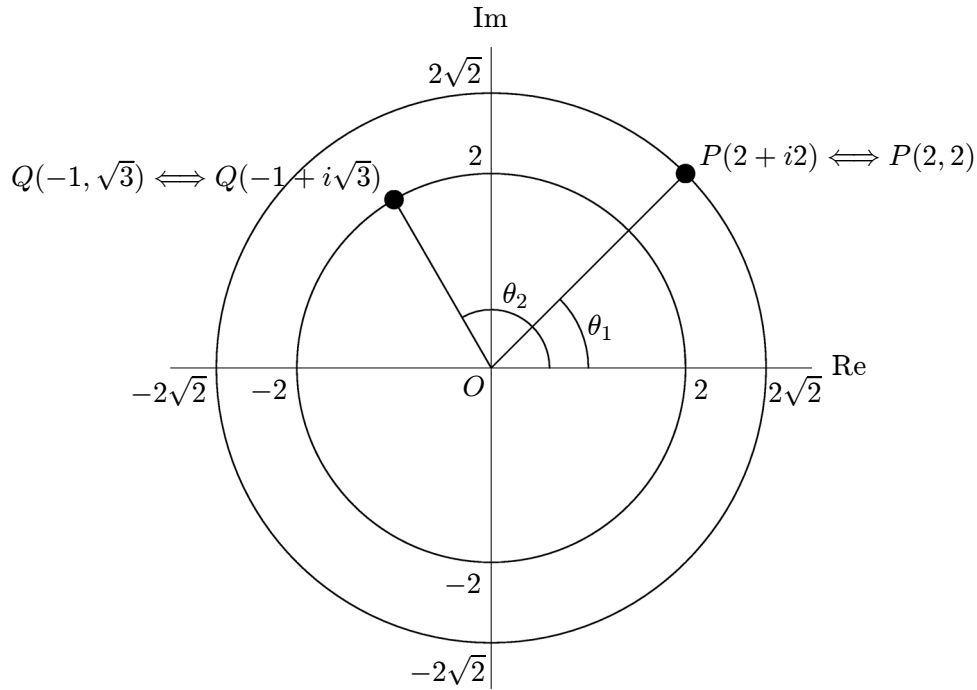


図 1.13: 直交座標表示と極座標表示の相互変換

まず、点 P と点 Q を直交座標表示すると

$$2 + i2 \quad (= z_1) \quad \text{と} \quad -1 + i\sqrt{3} \quad (= z_2)$$

と表されます (虚部であることを明示するために i を先に書きます)。また、図 1.13 のように原点 O を中心として点 P を通る円を描けば、半径 $r_1 = |z_1|$ は $\sqrt{(2+i2)(2-i2)} = 2\sqrt{2} (= r_1)$ となり、偏角 θ_1 は $\arg(2+i2) = \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4} (= \theta_1)$ となります。よって、点 P の三角関数による極座標表示は

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \left(= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 + i2 \right)$$

となります。同様に、図 1.13 のように原点 O を中心として点 Q を通る円を描けば、半径 $r_2 = |z_2|$ は $\sqrt{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = 2 (= r_2)$ となり、偏角 θ_2 は $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \pi + \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3} (= \theta_2)$ となります。よって、点 Q の三角関数による極座標表示は

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad \left(= 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3} \right)$$

となります。さらに、点 P と点 Q について指数関数による極座標表示を行なえば

$$z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{と} \quad z_2 = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

となります。

【注意】本テキストでは、複素平面上的座標 $z = x + iy$ で表される点 $P(z)$ の偏角 (argument) θ [rad] を求めるにあたって、主に工学系の書籍で用いられる

$$\theta = \arg z \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

を使用します。なぜなら、普通の数学書では、逆正接関数 $\arctan$ は、平面上の任意の点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) に対して $\tan \theta = \frac{y}{x}$ を満たす角 θ [rad] $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を返す関数として定義されているためです。この定義だと点 $P(x, y)$ が第2象限と第3象限にある場合には正しい角を得ることができませんし、 $x = 0$ となるような点 $P(0, y)$ では角を得ることさえできません。これに対して、 $\arg z$ によって得られる角 θ [rad] は、第2象限にある場合は $\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}$ を返し、第3象限にある場合は $\theta = -\pi + \arctan \frac{y}{x}$ を返します。また、 $x = 0$ のときには、 $y > 0$ であれば $\frac{\pi}{2}$ を返し、 $y < 0$ であれば $-\frac{\pi}{2}$ を返します。なお、数式処理ソフト Mathematica の関数 **ArcTan**[x,y] は、点がどの象限にあるかを考慮して値を返すので、関数 **Arg**[z] と同じ値を返します。

四則演算の加法と減法については、直交座標表示を用いると容易に計算することができます。

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ &= (2 + i2) + (-1 + i\sqrt{3}) = 2 - 1 + i(2 + \sqrt{3}) = 1 + i(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \\ &= (2 + i2) - (-1 + i\sqrt{3}) = 2 + 1 + i(2 - \sqrt{3}) = 3 + i(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

あとは、必要に応じて極座標表示を行ないます (極座標表示で計算するのは大変です)。

$$\text{参考 : } \arg(1 + i(2 + \sqrt{3})) = \frac{5\pi}{12}, \quad \arg(3 - i(2 - \sqrt{3})) = \arctan \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \doteq 0.08908.$$

また、残りの乗法と除法については、極座標表示を用いると容易に計算することができます。三角関数による極座標表示を用いた乗法と除法の計算は以下のようになります。

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= \left(2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
&= \left(2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right) / \left(2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).
\end{aligned}$$

指数関数による極座標表示を用いた乗法と除法は、もっと直接的に計算することができ、以下のようになります。

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \left(2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
&= 4\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi}{3}} \\
&= 4\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \left(2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) / \left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
&= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{2\pi}{3}} \\
&= \sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

ちなみに、直交座標表示で計算すると以下ようになります。

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i2) \cdot (-1 + i\sqrt{3}) = -2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3}).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i2}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

もちろん、これらの点を極座標表示すると上記のようになります。

$$\text{参考 : } \arg(-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})) = \frac{11\pi}{12}, \quad \arg\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\pi}{12}.$$

(メモ用紙)

第2章 フーリエ級数

2.1 直交関数系とフーリエ級数

平面上の2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ に対して、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると、その内積 $(\vec{a}, \vec{b})$ は、

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

と定義されています。また、

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \cos \theta = 0 \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

を満たすとき、ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は**直交する**といえます。この概念を関数に対応させて、次の定義を与えましょう。

定義 3 閉区間 $[a, b]$ で定義される積分可能な2つの連続関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して、内積を

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

で定義する。また、 $(f(x), g(x)) = 0$ を満たすとき、関数 $f(x)$ と $g(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で**直交する**という。

さらに、 $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ を満たすベクトルの組 $\vec{a}$, $\vec{b}$ は2次元ベクトル空間 (平面) の**直交基底**と呼ばれ、加えて、 $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ (ノルムが1) を満たすとき**正規直交基底**と呼ばれました。内積の場合と同様に、この概念を関数に対応させて、次の定義を与えましょう。

定義 4 閉区間 $[a, b]$ で連続で積分可能な関数 $\varphi_n(x)$ からなる関数列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ に対して、異なる2つの関数 $\varphi_m(x), \varphi_n(x)$ ($m \neq n$) が区間 $[a, b]$ 上で直交しているとき、すなわち、

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots; m \neq n)$$

を満たし、さらに、

$$(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすとき、関数列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ を区間 $[a, b]$ 上の**直交関数系**という。さらに、この直交関数系が

$$(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすとき (各関数のノルム $\|\varphi_n(x)\|$ が1のとき)、関数列 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ を区間 $[a, b]$ 上の**正規直交関数系**という。ただし、関数 $\varphi_n(x)$ のノルム $\|\varphi_n(x)\|$ は、

$$\|\varphi_n(x)\| = (\varphi_n(x), \varphi_n(x))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義する。

定義4を満たす直交関数系として次の定理が得られます。

定理 2.1 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

は直交関数系である。

証明 $\cos 0x = 1$ ($n = 0$) に注意すれば、 $m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx \quad (\because \text{定理 1.4}) \\ &= 0. \quad (\because \sin \text{関数は奇関数であるから}) \end{aligned}$$

$m \neq n$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx \quad (\because \text{定理 1.4}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} (\sin(m+n)x) + \frac{1}{m-n} (\sin(m-n)x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx \quad (\because \text{定理 1.4}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} (-\sin(m+n)x) + \frac{1}{m-n} (\sin(m-n)x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$m = n$ のとき、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \, dx \quad (\because 2 \text{ 倍角の公式より}) \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2n} (\sin 2nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx \quad (\because 2 \text{ 倍角の公式より}) \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n} (\sin 2nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx &= \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx &= [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

以上より、関数列 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上の直交関数系である。 ■

系 2.2 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

は正規直交関数系である。

証明 定理 2.1 の証明より、各ノルムは

$$\begin{aligned}
\|1\| &= (1, 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}, \\
\|\cos nx\| &= (\cos nx, \cos nx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\
\|\sin nx\| &= (\sin nx, \sin nx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

である。したがって、各関数を各ノルムで割ることにより正規直交関数系を得る。 ■

もちろん、直交関数系はベクトル空間の (直交) 基底の類似として定義したものですから、級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を構成する直交関数系 (ベクトル) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ は、係数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ が実数上で、1 次独立となります¹。ただし、区間 $[-\pi, \pi]$ で収束し、項別積分可能とします。なぜなら、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$

とおき、級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と直交関数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ の内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cdot 1 \, dx &= 0 \quad \implies a_0 = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cdot \cos kx \, dx &= 0 \quad \implies a_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \cdot \sin kx \, dx &= 0 \quad \implies b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

が得られます。すなわち、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$

ならば、

$$a_0 = a_1 = b_1 = \dots = a_n = b_n = \dots = 0$$

が成り立ち、1 次独立の定義を満たしています。この直交関数系の 1 次独立性は、上に挙げた直交関数系によって構成された級数の級数展開が一意性であることを意味しており、次に学ぶフーリエ級数が一意にフーリエ級数展開されることを示唆しています。

さて、ある関数 $f(x)$ が級数

$$f(x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

¹級数 $f(x)$ の定数項が $\frac{a_0}{2}$ となっているのは、関数 1 のノルムが $\sqrt{2\pi}$ であるのに対して他の関数のノルムが $\sqrt{\pi}$ であることを考慮してあります。このように置くことで、フーリエ級数展開したときにフーリエ係数を効率よく表現することができます。

で表されている (近似されている) としましょう。このとき、関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能かつ、この級数が項別積分可能であるとすると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx \\ &= \pi a_0\end{aligned}$$

となります。次に、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right) \\ &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx \\ &= \pi a_k\end{aligned}$$

となります。同様に、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right) \\ &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx \\ &= \pi b_k\end{aligned}$$

となります。以上をまとめると次の定理が得られます。

定理 2.3 関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能かつ、級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

が項別積分可能であるとき、その係数は

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

によって与えられる。

この結果は、数学の大切な考え方の1つで、自分自身の一部を自分自身を用いて表していることから**再生核の原理**と言われています。なお、ここで求めた係数 $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ を**フーリエ係数** (Fourier coefficients) と呼び、この係数を持つ級数を**フーリエ級数** (Fourier series) と呼びます。

【注意】 $\cos 0x = 1$ であることに注意すると、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos 0x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

となります。また、ノルムを考慮して定数項を $\frac{a_0}{2}$ とすることで、係数が統一された形式で表現されます。ただし、 b_0 に相当する係数

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin 0x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 0 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 0 \, dx = 0$$

は明らかに 0 となるので表記しないのが普通です。

一般には、区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能な周期関数 $f(x)$ ($f(x+2\pi) = f(x)$) が与えられたとき、この関数 $f(x)$ から、フーリエ係数

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を求め、フーリエ級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を求めます。この作業を**フーリエ級数展開**と呼びます。また、フーリエ級数展開されたフーリエ級数は元の関数 $f(x)$ と全く等しいかどうかわかりません。そこで、一般的に、記号「 $\sim$ 」を用いて

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と表すことにします。

ここで、フーリエ級数展開において、関数 $f(x)$ が有限区間 $[a, b]$ で「積分可能」よりも強い条件である「**区分的に連続**」という条件を導入しておきましょう。

定義 5 関数 $f(x)$ を有限区間 $[a, b]$ で定義された関数とする。さらに、関数 $f(x)$ は有限個の点 $c_1, c_2, \dots, c_m$ を除いて連続で、各点 c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) において左側極限

$$f(c_k + 0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(c_k + h)$$

と右側極限

$$f(c_k - 0) = \lim_{h \rightarrow -0} f(c_k + h)$$

が存在 ($\neq \pm\infty$) するとしよう。ただし、 $c_1 = a$ では左側極限が存在し、 $c_m = b$ では右側極限が存在するものとする。このとき、関数 $f(x)$ は有限区間 $[a, b]$ で**区分的に連続**であるという。

この「区分的に連続」という条件を入れることで、関数 $f(x)$ は有限区間 $[a, b]$ に含まれる各区間で積分可能となり、関数 $f(x)$ が有限区間 $[a, b]$ でフーリエ級数展開できることを保障しています²。また、図 2.1 は区分的に連続な関数の例となっています。実際、有限区間 $[a, b]$ において有限個の点 c_1, c_2, c_3, c_4 を除いて連続で、かつ、 c_1 の左側極限、 c_2 および c_3 の左側極限と右側極限、 c_4 の右側極限がそれぞれ存在しています。

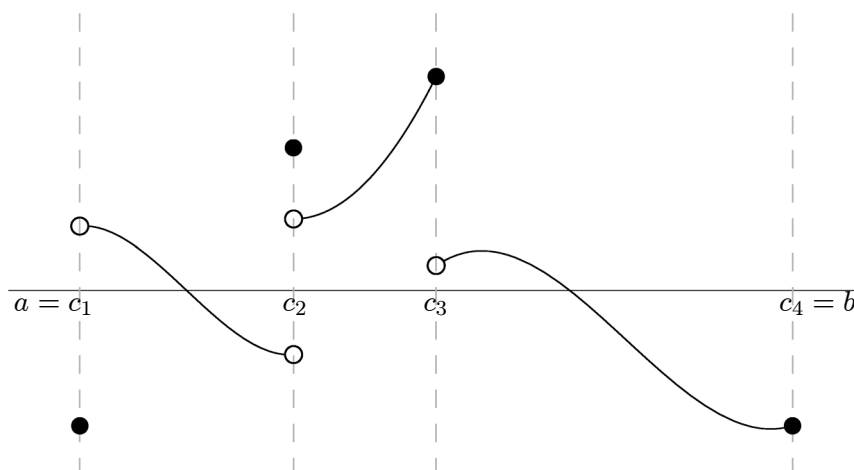


図 2.1: 区分的に連続な関数

さらに、「区分的になめらか」という条件を導入しましょう。

定義 6 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が有限区間 $[a, b]$ で区分的に連続であるとき、関数 $f(x)$ は**区分的になめらか**であるという。言い換えれば、不連続な各点 c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) で

$$f'(c_k + 0) = \lim_{h \rightarrow +0} f'(c_k + h) \neq \pm\infty \quad \text{かつ} \quad f'(c_k - 0) = \lim_{h \rightarrow -0} f'(c_k + h) \neq \pm\infty$$

を満たすとき、**区分的になめらか**であるという。

この「区分的になめらか」という条件を入れると、すなわち、関数 $f(x)$ が区分的に連続かつ区分的になめらかであるとする、関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

- $f(x)$ の連続な点 x ($\neq c_k$) で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ の不連続な点 x ($= c_k$) で $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ に収束し

ます³。なお、詳細 (証明) については第 2.4 節の「フーリエ級数の収束」で述べることにします。

以後、このテキストで扱うフーリエ級数展開の対象となる関数 $f(x)$ は、 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が区分的に連続であるとし、すなわち、関数 $f(x)$ のフーリエ級数が $f(x)$ に収束する (近似される) ような関数を対象とします。

²これから学ぶフーリエ級数展開やフーリエ変換で扱う関数も全て区分的に連続な関数が対象となります。また、実用面で「区分的に連続」という条件を入れても、十分にフーリエ級数展開やフーリエ変換を活用することができます。

³関数が連続であれば、そのフーリエ級数は元の関数に完全に一致しますが、不連続な点を含む関数のフーリエ級数は、不連続な点の周りで近似されるため元の関数には完全に一致しません (フーリエ級数は三角関数達の総和なので連続関数になる)。これは、関数の厳密性より、関数がフーリエ級数として表せる利便性を重要視しています。

2.2 複素フーリエ級数

第1.3節で学習したように、三角関数は指数関数で表現することができましたから、前節の三角関数で表現されたフーリエ級数を指数関数で表現されたフーリエ級数に書き換えてみましょう。

三角関数と指数関数には、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{および} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

の関係が成り立ちましたから、 θ を nx で置き換えれば、

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{および} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

と書き換えられます。これらの関係式を関数 $f(x)$ のフーリエ級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

に代入すると

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx})$$

となります。ここで、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (c_{-n} = \overline{c_n})$$

とおくと、改めて

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

と書き直すことができます。このような級数を得る作業を**複素フーリエ級数展開**と呼び、得られた級数を**複素フーリエ級数**と呼びます。なお、三角関数で表現されたフーリエ係数

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

より、指数関数で表現されたフーリエ係数

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

が得られます ($k = 0, -1, -2, \dots$ の場合のフーリエ係数も上式で良いことが容易に確かめられます)。これを**複素フーリエ係数**と呼びます。以上をまとめると、次の定理を得ます。

定理 2.4 関数 $f(x)$ が区間 $[-\pi, \pi]$ で積分可能かつ、級数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

が項別積分可能であるとき、その係数は

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

によって与えられる。

複素フーリエ級数の直交関数系は、閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上において、

$$\dots, e^{i(-n)x}, \dots, e^{i(-2)x}, e^{i(-1)x}, 1, e^{ix}, e^{i2x}, \dots, e^{inx}, \dots$$

$$\Longleftrightarrow \varphi_n(x) = e^{inx} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となります。また、この複素関数列の内積は、後の方の関数に共役をとって、

$$(\varphi_m(x), \varphi_n(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx$$

のように定義します。このとき、 $m \neq n$ ならば、内積は

$$\begin{aligned} (\varphi_m(x), \varphi_n(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \left[\frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、関数が直交していることがわかります。 $m = n$ ならば、内積は

$$\begin{aligned} (\varphi_n(x), \varphi_n(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)x} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となり、各関数 $\varphi_n(x)$ のノルムが

$$\|\varphi_n(x)\| = (\varphi_n(x), \varphi_n(x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

であることもわかります。

さらに、複素フーリエ級数で注意しなければならないことは、複素フーリエ級数の部分和は、

$$\begin{aligned} S_k(x) &= c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + (c_2 e^{i2x} + c_{-2} e^{-i2x}) + \cdots + (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \\ &= \sum_{n=-k}^k c_n e^{inx} \end{aligned}$$

のように**対称和**に取る必要があります⁴。なぜなら、三角関数によるフーリエ級数と比較すると、三角関数によるフーリエ級数の第 n 項を指数関数で表現するには e^{inx} と e^{-inx} が必要になるからです。

そもそも三角関数によるフーリエ級数と指数関数によるフーリエ級数 (複素フーリエ級数) は同一のもので、その表現が異なっているにすぎません。指数関数によるフーリエ級数は、直交関数系 (直交基底) が複素関数であるためその係数も複素数になりますが、 $c_n e^{inx}$ と $c_{-n} e^{-inx}$ の和は結局実数となって、元の三角関数によるフーリエ級数に一致します。どちらの表現が便利であるか簡単に言い切ることはできませんが、数値を与えられた具体的な問題では実関数の範囲で処理できる三角関数によるフーリエ変換が比較的便利で、理論的な研究には表現が簡単で計算が容易な指数関数によるフーリエ級数が便利なようです。いずれにしろ、双方の表現に慣れておく必要があります。

	三角関数によるフーリエ級数	指数関数によるフーリエ級数
級数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$
係数	$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$	$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx,$ $c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} \, dx$

$$* \text{ 関係 } c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \left(c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \right) \text{ が成り立つ。}$$

表 2.1: 三角関数によるフーリエ級数と指数関数によるフーリエ級数の比較

⁴前にも述べたように、三角関数は、指数関数によって極座標表示されたベクトル $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ の合成和として得られたベクトルと一致します。したがって、複素フーリエ級数は、上記のような対称性を持ちます。この対称性は、以後のフーリエ変換や離散的なフーリエ変換でも姿を見せるので、意識しながら付き合う必要があります。

2.3 フーリエ級数展開

これまで、関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開に関して、関数の定義区間やフーリエ級数の積分区間を断りなく $[-\pi, \pi]$ に取ってきました。これは、フーリエ級数を構成する三角関数が基本周期 2π を持つためです。すなわち、フーリエ級数の各項

$$\cos nx \quad \text{および} \quad \sin nx \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

の周期は、それぞれ $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \dots$ となり、図 2.2 のように 2π の幅の区間にそれぞれ 1 回転分, 2 回転分, 3 回転分, $\dots$ の波形を含みます。したがって、これらの総和 (フーリエ級数) は周期 2π を持つことになり、もし、関数 $f(x)$ が周期 2π を持てば、区間 $[-\pi, \pi]$ についてフーリエ級数展開するだけで**全区間**をフーリエ級数で表現したことになります。

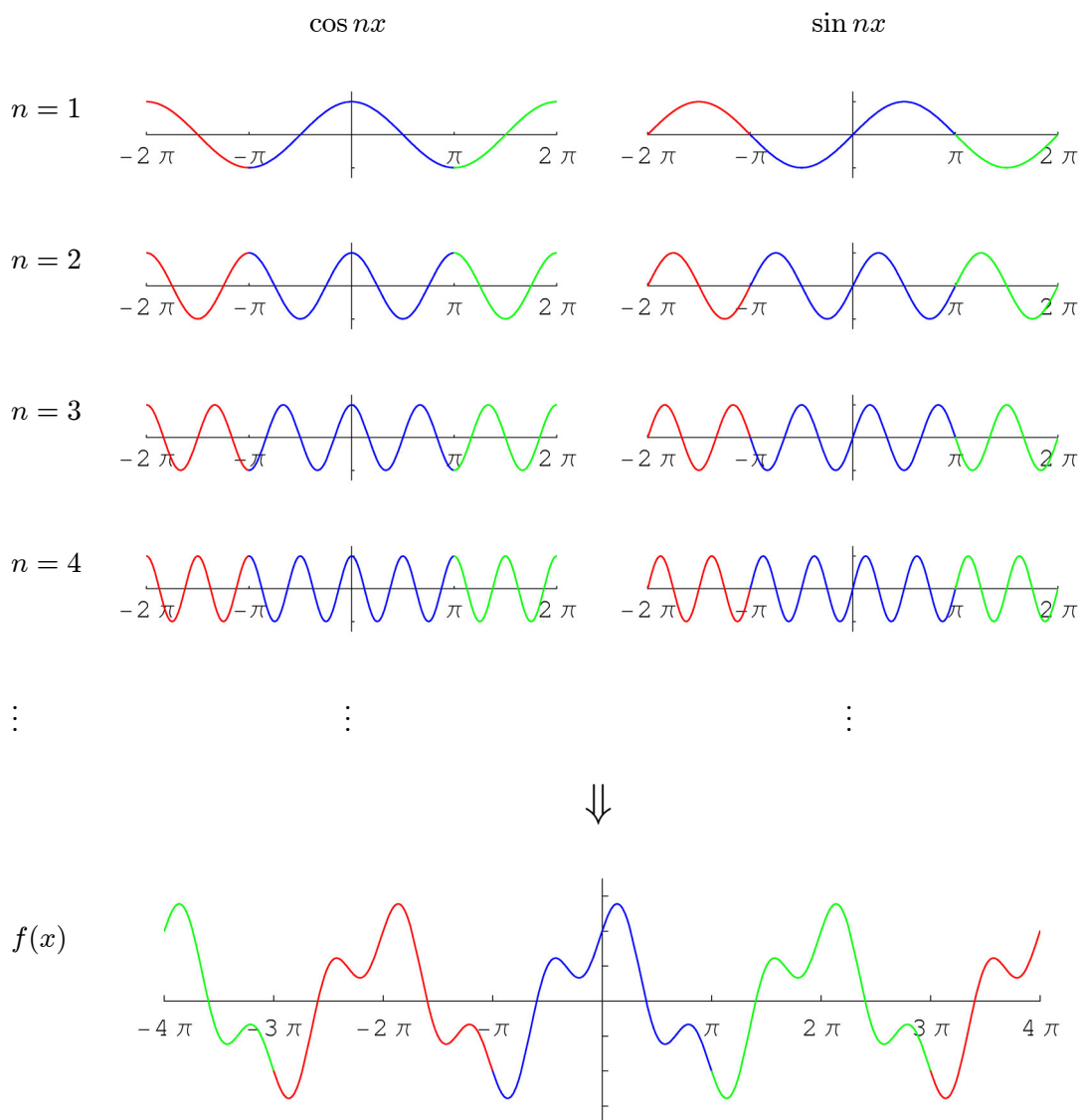


図 2.2: 周期 2π を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数

一般には、周期 2π を持つ関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開するには、積分区間を $[a, a + 2\pi]$ にとって、フーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{および} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

を求めればよいことがわかります⁵。

2.3.1 周期 2π を持つ関数のフーリエ級数展開

前述の考察より、周期 2π を持つ(周期)関数 $f(x)$ のフーリエ級数を以下のように改めましょう。

定理 2.5 周期 2π を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

である。ただし、

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

をフーリエ係数とする。

例として、周期 2π を持つ関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0), \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

をフーリエ級数展開して、フーリエ級数を求めてみましょう。参考までに、関数 $f(x)$ のグラフは図 2.3 のようになります。なお、このような波形を**三角波**または**のこぎり波**と呼びます。

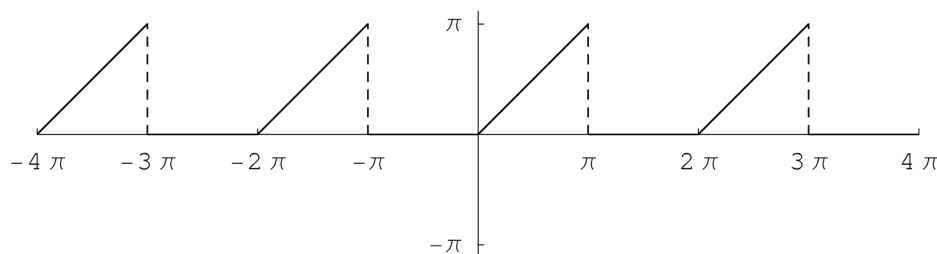


図 2.3: 三角波 (のこぎり波)

⁵書籍によっては積分区間を $[0, 2\pi]$ とするものもありますが、本テキストでは断りのない限り $[-\pi, \pi]$ を使用することにします。

フーリエ級数を求めるには、フーリエ係数を求めればよいので、以下のように計算します。

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \\ &= (0 - 0) - \frac{1}{k\pi} \left[\frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} \quad (\because \sin k\pi = 0) \\ &= -\frac{1}{k^2\pi} (-\cos k\pi - (-1)) = -\frac{-(-1)^k + 1}{k^2\pi} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\ &= -\frac{1 + (-1)^{k-1}}{k^2\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} -\cos kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} - 0 \right) - \frac{1}{k\pi} \left[\frac{-\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} - 0 \right) - (0 - 0) \quad (\because \sin k\pi = 0) \\ &= \frac{-(-1)^k}{k} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

以上より、周期 2π を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right)$$

となります。ついでですから、グラフを描くことで、フーリエ級数の部分和

$$S_k(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^k \left(-\frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right)$$

が関数 $f(x)$ に収束していく様子を観察しておきましょう (図 2.4)。

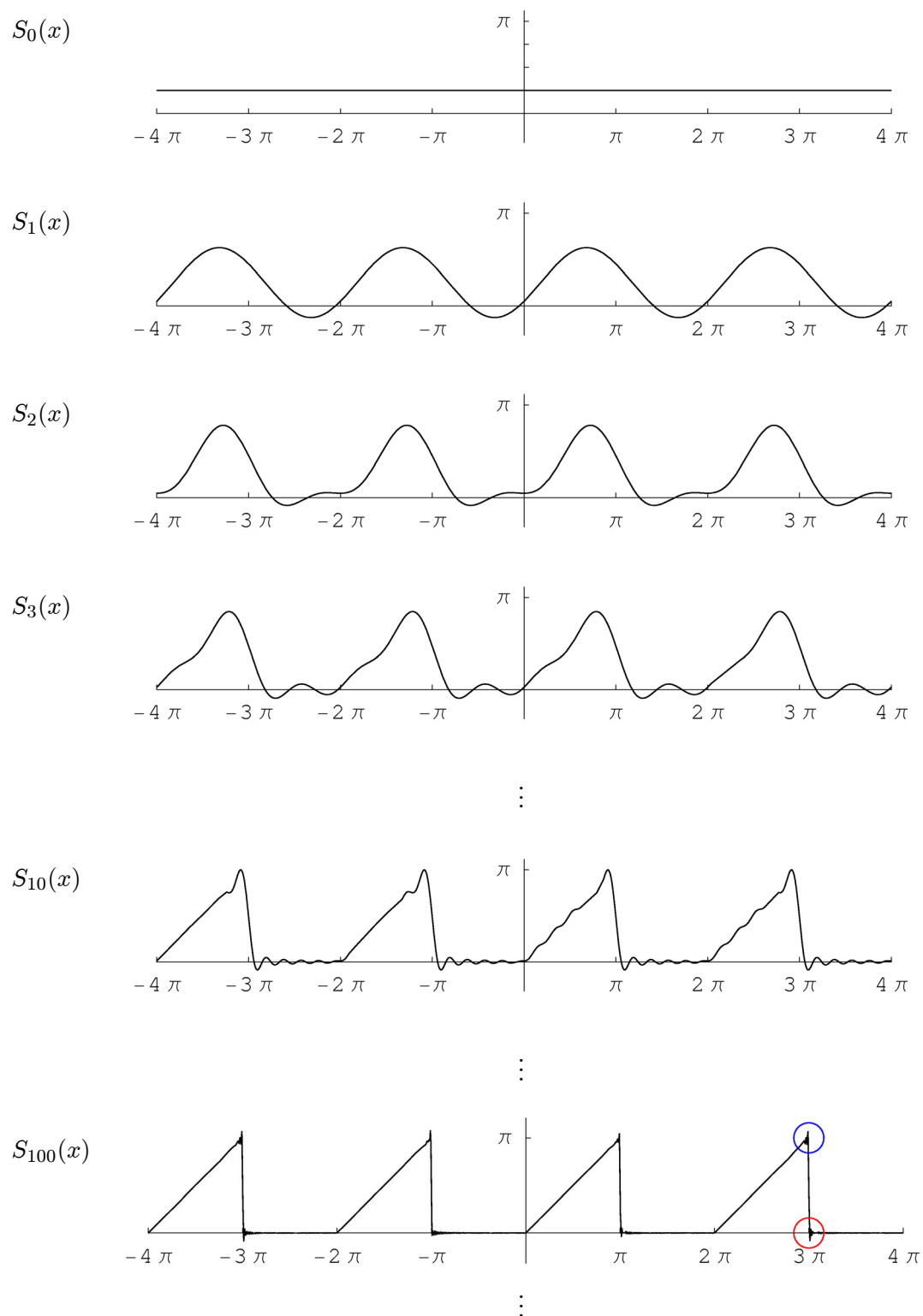


図 2.4: フーリエ級数が収束していく様子

なお、図 2.4 の $S_{100}(x)$ の青丸○と赤丸○の部分拡大すると図 2.5 のようになっており、これは**ギブスの現象**と呼ばれています。この現象は極限をとることで消えて、関数 $f(x)$ に収束します。

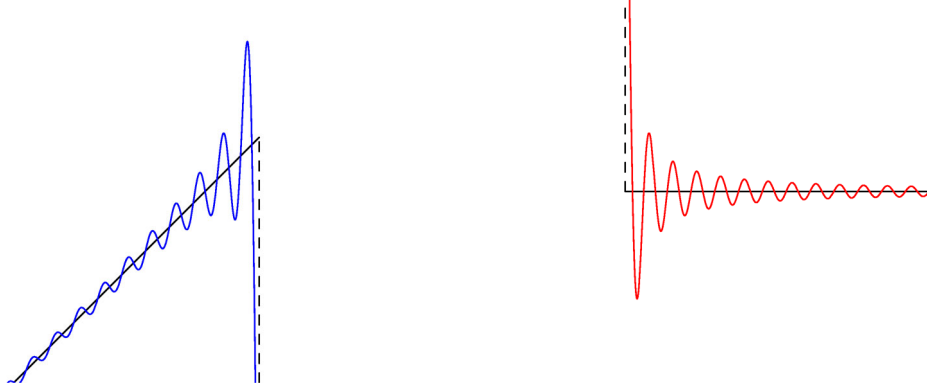


図 2.5: ギブスの現象

また、三角関数によるフーリエ級数と同様に、指数関数によるフーリエ級数で求めることもできます。指数関数によるフーリエ係数を求めると、

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i0x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \cdot 1 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}, \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x \cdot e^{-ikx} dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-ik} x e^{-ikx} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{ik} \pi e^{-ik\pi} - 0 \right) - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{ik} \pi e^{-ik\pi} \right) - \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{ik} e^{-ik\pi} - \left(-\frac{1}{ik} \right) \right) \\
 &= i \frac{1}{2k\pi} \left((\pi - 1) \cdot (-1)^k + 1 \right) \quad (\because e^{ik\pi} = (-1)^k)
 \end{aligned}$$

となり ($c_0 = b_0$ に注意)、したがって、指数関数によるフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=-\infty \atop (n \neq 0)}^{+\infty} i \frac{1}{2n\pi} ((\pi - 1) \cdot (-1)^n + 1) e^{inx} dx$$

となります。この章では、三角関数によるフーリエ級数を中心に扱いますが、指数関数によるフーリエ級数への対応や複素フーリエ係数の計算もできるようにしておいてください。以後、単にフーリエ級数・フーリエ係数・フーリエ級数展開と記述してある場合は、三角関数によるフーリエ級数・三角関数によるフーリエ係数・三角関数によるフーリエ級数展開を指すことにし、指数関数による場合は、複素を付加して表すことにします。

ある関数のフーリエ級数展開を求めるには、大量の計算を必要とします。そこで、1つの方法として、関数 $f(x)$ が偶関数 ($f(-x) = f(x)$) の場合と奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) の場合のフーリエ級数展開を考えましょう。まず、偶関数 $f(x)$ の場合のフーリエ級数を求めてみます。偶関数の条件 $f(-x) = f(x)$ を考慮して、フーリエ係数 a_k を

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x = -t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \cos k(-t) (-dt) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 a_k は、

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となります。同じく、フーリエ係数 b_k を

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x = -t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \sin k(-t) (-dt) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 b_k は、

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

となります。ゆえに、偶関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + 0 \cdot \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \end{aligned}$$

となります。なお、このフーリエ級数は**フーリエ余弦級数**と呼ばれます。以上をまとめると、次の系を得ます。

系 2.6 周期 2π を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

である。ただし、

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

をフーリエ余弦係数とする。

同様に、奇関数 $f(x)$ の場合のフーリエ級数を求めましょう。奇関数の条件 $f(-x) = -f(x)$ を考慮して、フーリエ係数 a_k を

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x = -t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \cos k(-t) (-dt) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 a_k は、

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となります。同じく、フーリエ係数 b_k を

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \end{aligned}$$

と変形します。このとき、前項に対して $x = -t$ とおいて変数変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-t) \sin k(-t) (-dt) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \end{aligned}$$

となります。したがって、改めて t を x と置き換えると、フーリエ係数 b_k は、

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

となります。ゆえに、奇関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (0 \cdot \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \end{aligned}$$

となります。なお、このフーリエ級数は**フーリエ正弦級数**と呼ばれます。以上をまとめると、次の系を得ます。

系 2.7 周期 2π を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ**正弦**級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

である。ただし、

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を**フーリエ正弦係数**とする。

定理 2.5・系 2.6・系 2.7 をまとめると、下表のようになります。

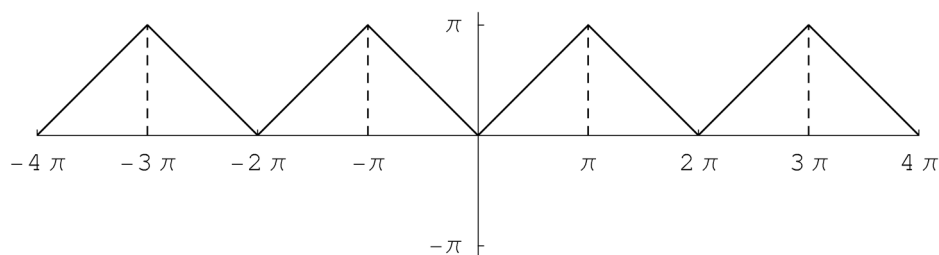
	フーリエ級数	フーリエ係数
関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$
偶関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$	$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$
奇関数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$	$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$

表 2.2: 周期 2π を持つ偶関数および奇関数のフーリエ級数

例題 1 周期 2π を持つ偶関数

$$f(x) = \begin{cases} -x & (-\pi \leq x < 0), \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

のフーリエ (余弦) 級数を求めなさい。



解答例 偶関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot 1 \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \cos kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \\ &= (0 - 0) - \frac{2}{k\pi} \left[\frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} \quad (\because \sin k\pi = 0) \\ &= -\frac{2}{k^2\pi} (-\cos k\pi - (-1)) = -2 \frac{-(-1)^k + 1}{k^2\pi} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\ &= -2 \frac{1 + (-1)^{k-1}}{k^2\pi} \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2π を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

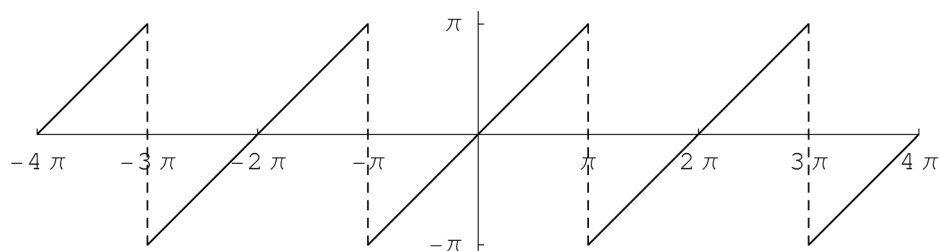
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2\pi} \cos nx$$

となる。

例題 2 周期 2π を持つ奇関数

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

のフーリエ (正弦) 級数を求めなさい。



解答例 奇関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \int_0^{\pi} -\cos kx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} - 0 \right) - \frac{2}{k\pi} \left[\frac{-\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} - 0 \right) - (0 - 0) \quad (\because \sin k\pi = 0) \\
 &= 2 \frac{-(-1)^k}{k} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \\
 &= 2 \frac{(-1)^{k-1}}{k}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2π を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

となる。

2.3.2 周期 $2L$ を持つ関数のフーリエ級数展開

これまで、周期関数の中でも周期 2π を持つ特定の周期関数を扱ってきました。この節では、周期 2π を持つ周期関数を拡張し、一般的な周期 $2L$ を持つ周期関数のフーリエ級数を導きましょう。

周期 $2L$ を持つ関数 $f(x)$ は、関係

$$f(x + 2L) = f(x)$$

を満たします。ここで、(比例) 関係

$$t = \frac{\pi}{L}x \iff x = \frac{L}{\pi}t \quad (2L \text{ を } 2\pi \text{ に伸縮})$$

を使って変数変換をすると

$$f\left(\frac{L}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$$

となり、 $f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ は周期 2π を持つ周期関数となります。したがって、 $f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ のフーリエ級数は、

$$f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

となり、フーリエ係数は、

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

となります。以上より、 $t = \frac{\pi}{L}x$ および $dt = \frac{\pi}{L}dx$ を使って x の式に戻すと、次の定理を得ます。

定理 2.8 周期 $2L$ を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right)$$

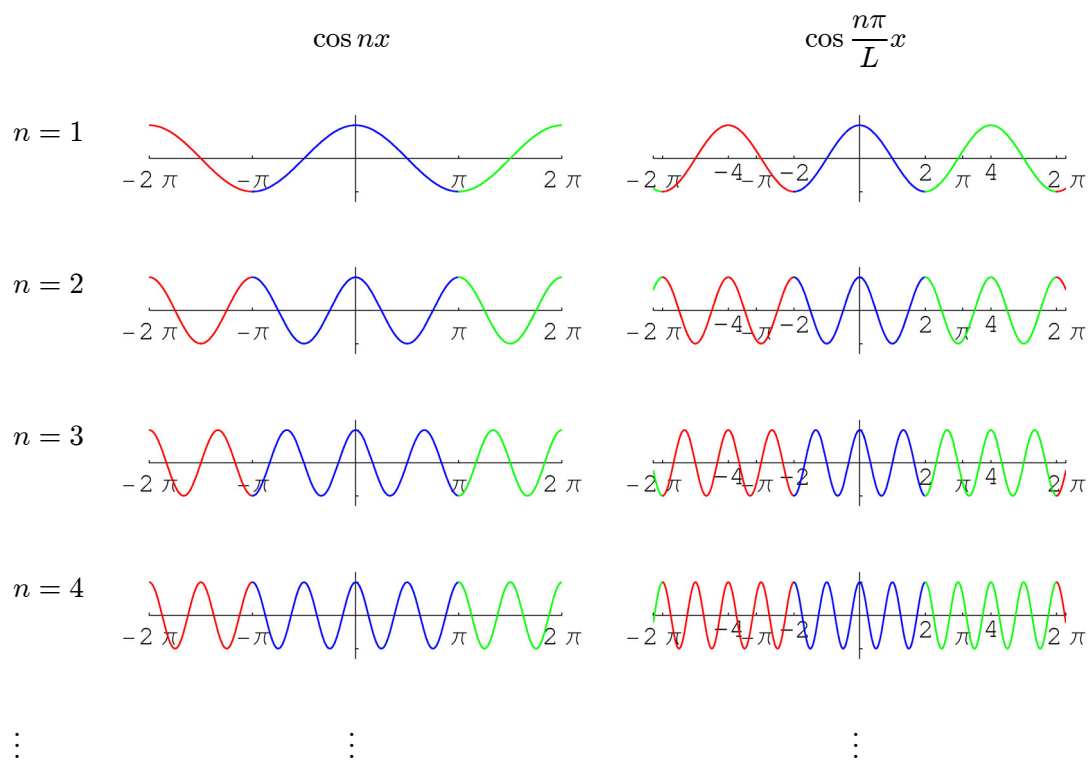
である。ただし、

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L}x \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L}x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

をフーリエ係数とする。

この定理のフーリエ級数を構成する各項の三角関数は、図 2.6 のように周期 2π の三角関数を $\frac{L}{\pi}$ 倍に伸縮したものとなっています。そのため、その総和であるフーリエ級数の周期も $2L \left(= \frac{L}{\pi} \cdot 2\pi \right)$ となります (図 2.7)。



* 上図は、 $L = 2$ として $\cos$ 関数について比較したものです ($\sin$ 関数も同様)。

図 2.6: 三角関数と $\frac{L}{\pi}$ 倍に伸縮された三角関数の比較

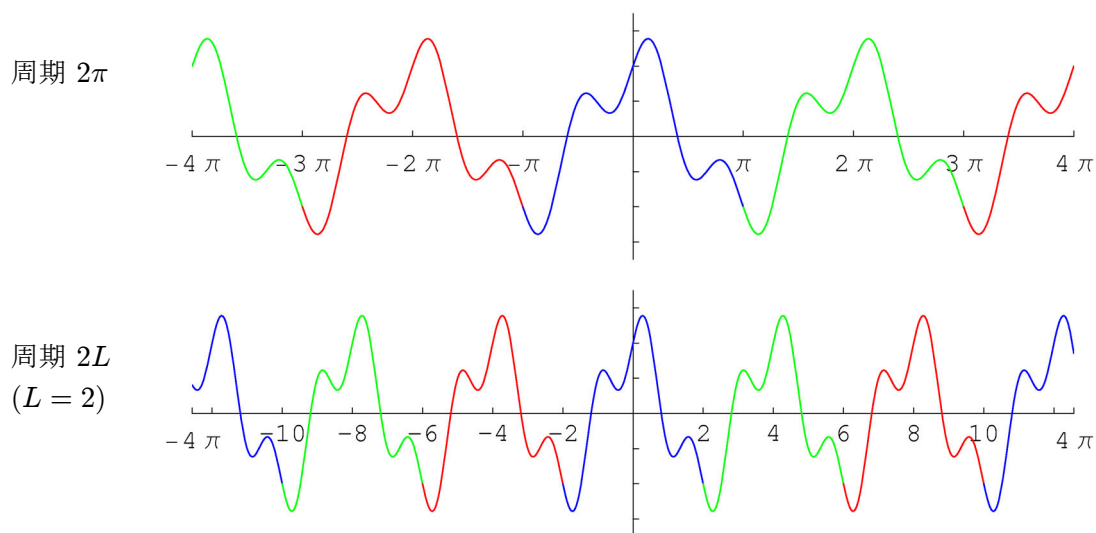


図 2.7: 周期 2π のフーリエ級数と $\frac{L}{\pi}$ 倍に伸縮されたフーリエ級数の比較

周期 2π を持つ関数のフーリエ級数と同様に、関数が偶関数の場合と奇関数の場合のフーリエ級数を求めると、以下の系が得られます。

系 2.9 周期 $2L$ を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

である。ただし、

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

をフーリエ係数とする。

系 2.10 周期 $2L$ を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

である。ただし、

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

をフーリエ係数とする。

定理 2.8・系 2.9・系 2.10 をまとめると、下表のようになります。

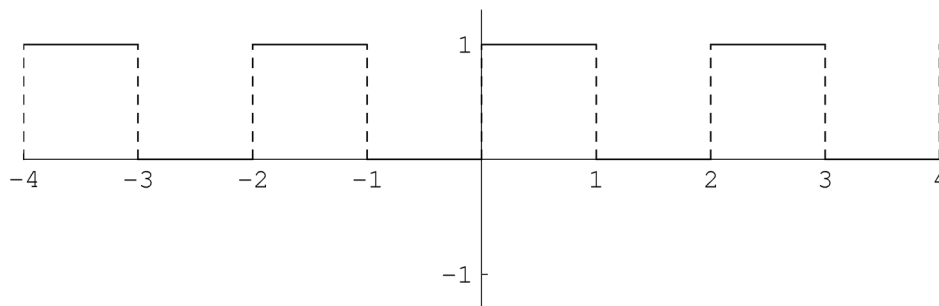
	フーリエ級数	フーリエ係数
関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$	$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx,$ $b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx$
偶関数	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$	$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx$
奇関数	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$	$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx$

表 2.3: 周期 $2L$ を持つ偶関数および奇関数のフーリエ級数

例題 1 周期 2 ($L = 1$) を持つ関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq x < 0), \\ 1 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

のフーリエ級数を求めなさい。



解答例 フーリエ係数を求めると、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cdot 1 \, dx = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = \int_0^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1, \\ a_k &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cdot \cos \frac{k\pi}{1} x \, dx = \int_0^1 1 \cdot \cos k\pi x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \left[\frac{\sin k\pi x}{k\pi} \right]_0^1 = 0 - 0 = 0, \\ b_k &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{1} x \, dx = \int_0^1 1 \cdot \sin k\pi x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \left[\frac{-\cos k\pi x}{k\pi} \right]_0^1 = \frac{(-\cos k\pi - (-1))}{k\pi} \\ &= \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2 を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x$$

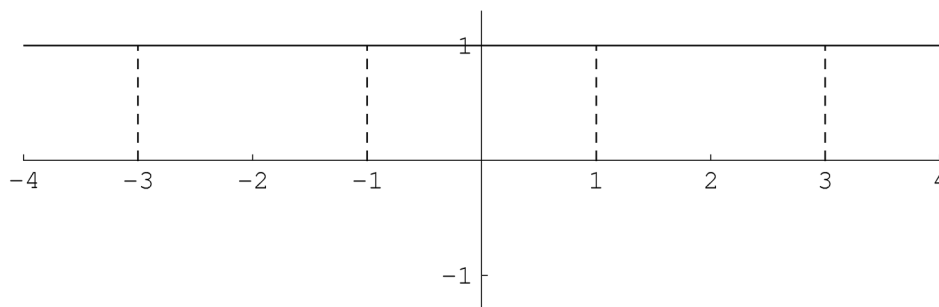
となる。

* 上図のような波形を**方形波**と呼びます。

例題 2 周期 2 ($L = 1$) を持つ偶関数

$$f(x) = 1 \quad (-1 \leq x < 1)$$

のフーリエ (余弦) 級数を求めなさい。



解答例 偶関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cdot 1 \, dx = 2 \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = 2 \int_0^1 1 \, dx = 2[x]_0^1 = 2,$$

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cdot \cos \frac{k\pi}{1} x \, dx = 2 \int_0^1 1 \cdot \cos k\pi x \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= 2 \left[\frac{\sin k\pi x}{k\pi} \right]_0^1 = 2(0 - 0) = 0$$

となる。したがって、周期 2 を持つ偶関数 $f(x)$ のフーリエ余弦級数は、

$$f(x) \sim 1 \quad (\Longleftrightarrow f(x) = 1)$$

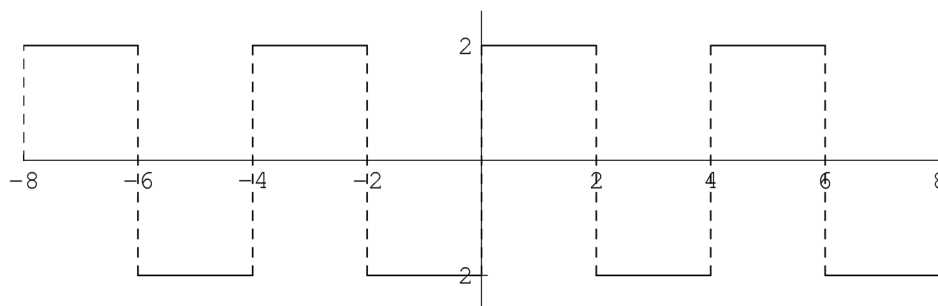
となる。

* sin 関数だけでなく、cos 関数をも必要としない特別な例です。

例題 3 周期 4 ($L = 2$) を持つ奇関数

$$f(x) = \begin{cases} -2 & (-2 \leq x < 0), \\ 2 & (0 \leq x < 2) \end{cases}$$

のフーリエ (正弦) 級数を求めなさい。



解答例 奇関数であることに注意すれば、フーリエ係数は、

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x dx = \int_0^2 2 \cdot \sin \frac{k\pi}{2} x dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ &= 2 \left[\frac{2}{k\pi} \left(-\cos \frac{k\pi}{2} x \right) \right]_0^2 = \frac{4}{k\pi} (-\cos k\pi - (-1)) \\ &= \frac{4(1 - (-1)^k)}{k\pi} \quad (\because \cos k\pi = (-1)^k) \end{aligned}$$

となる。したがって、周期 2 を持つ奇関数 $f(x)$ のフーリエ正弦級数は、

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} x$$

となる。

* 上記のフーリエ級数は、例題 1 のフーリエ級数を $\frac{1}{2}$ だけ下に平行移動し、振幅を 4 倍し、周期を 2 倍したフーリエ級数と同じになります。

* 上記の関数は正確な奇関数ではありませんが、関数の不連続点 $c_m = 0 + 2m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) におけるフーリエ級数 $f(c_m)$ の値が

$$\frac{f(c_m + 0) + f(c_m - 0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

に収束するため、奇関数と同等に扱うことができます。

2.4 フーリエ級数の収束

この節では、フーリエ級数展開で得られたフーリエ級数が収束する場合に、フーリエ級数が再び元の関数に収束 (一致) することを示しましょう。なお、ここで扱う関数は、**区分的に連続かつ区分的になめらかな**周期 2π の周期関数とします⁶ (p.28 参照)。

まず、区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ を三角関数を使って

$$A_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

と近似したとします⁷。このとき、 $f(x)$ の $A_n(x)$ による **平均 2 乗誤差**

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - A_n(x)|^2 dx$$

について、次の定理が成り立ちます。

定理 2.11 δ_n は $A_n(x)$ の係数 c_k, d_k がそれぞれ $f(x)$ のフーリエ係数 a_k, b_k のとき最小となる。

証明 $B_n(x) = \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$ とおくと、 $A_n(x) = \frac{c_0}{2} + B_n(x)$ となり、平均 2 乗誤差は

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left((f(x))^2 + \frac{c_0^2}{4} + (B_n(x))^2 - c_0 f(x) + c_0 B_n(x) - 2f(x)B_n(x) \right) dx$$

と書き直される。ここで、それぞれ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_0^2}{4} dx = \left[\frac{c_0^2}{4} x \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{c_0^2}{4} \pi - \left(\frac{c_0^2}{4} (-\pi) \right) = \pi \frac{c_0^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (B_n(x))^2 dx &= \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} c_k^2 \cos^2 kx dx + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} d_k^2 \sin^2 kx dx + \sum_{k=1, l=1}^{n, n} \int_{-\pi}^{\pi} c_k d_l \cos kx \sin lx dx \\ &\quad + \sum_{k \neq l} \int_{-\pi}^{\pi} c_k c_l \cos kx \cos lx dx + \sum_{k \neq l} \int_{-\pi}^{\pi} d_k d_l \sin kx \sin lx dx \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + \sum_{k=1}^n d_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx + \sum_{k=1, l=1}^{n, n} c_k d_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx \\ &\quad + \sum_{k \neq l} c_k c_l \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx + \sum_{k \neq l} d_k d_l \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx \\ &= \sum_{k=1}^n \pi c_k^2 + \sum_{k=1}^n \pi d_k^2 + 0 + 0 + 0 = \pi \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2), \end{aligned}$$

⁶フーリエ級数を用いた解析では、区分的に連続という条件を入れても応用上十分であることがほとんどなので、区分的に連続であることを仮定しておきます。また、周期については、周期の伸縮によって任意の周期にすることができますが、簡単のため周期を 2π に固定して話を進めます。

⁷フーリエ級数の部分和とは異なります。

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \pi a_0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} B_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} c_k \cos kx dx + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} d_k \sin kx dx \\
&= \sum_{k=1}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{k=1}^n d_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0 + 0 = 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) B_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) c_k \cos kx dx + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d_k \sin kx dx \\
&= \sum_{k=1}^n c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \sum_{k=1}^n d_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\
&= \sum_{k=1}^n c_k (\pi a_k) + \sum_{k=1}^n d_k (\pi b_k) = \pi \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k)
\end{aligned}$$

となる。したがって、平均2乗誤差は

$$\begin{aligned}
\delta_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) - c_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{(c_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n ((c_k - a_k)^2 + (d_k - b_k)^2) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)
\end{aligned}$$

となり、 $c_k = a_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) および $d_k = b_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のとき、すなわち、フーリエ係数のとき最小となる。 ■

ここで、 $\delta_n^2 \geq 0$ に注意して $c_k = a_k$ かつ $d_k = b_k$ とすると、不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

が成り立ちます。この不等式は n がいくつでも成り立つことから、次の系を得ます。

系 2.12 (ベッセル (Bessel) の不等式) 関数 $f(x)$ のフーリエ係数 a_k, b_k に対して、不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

が成り立つ。

なお、関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和を

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

とおき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx = 0$$

を満たせば、ベッセルの不等式の等号が成り立ち、等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

が成り立ちます⁸。この等式は**パーセバル (Parseval) の等式**と呼ばれます。また、ベッセルの不等式より、直ちに次の定理が得られます。

定理 2.13 (リーマン (Riemann) ・ ルベーク (Lebesgue) の定理) 関数 $f(x)$ のフーリエ係数 a_k, b_k に対して、

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \longrightarrow 0 & (k \longrightarrow \infty), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \longrightarrow 0 & (k \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。

それでは、いくつか準備を行なった後に、フーリエ級数の収束について証明しましょう。

補題 2.14 (区分的に連続な) 関数 $f(x)$ に対して、 n を自然数とするととき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx = 0$$

が成り立つ。

証明 まず、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \sin \frac{1}{2} x \right) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cos \frac{1}{2} x \right) \sin nx dx \end{aligned}$$

と展開する。ここで、関数 $f(x)$ が区分的に連続な関数であるから、 $f(x) \sin \frac{x}{2}$, $f(x) \cos \frac{x}{2}$ は、再び区分的に連続な関数となる。したがって、上式の両辺にそれぞれ極限をとれば、リーマン・ルベークの定理より、その極限值は 0 となる。 ■

⁸関数 $f(x)$ が連続関数かつ積分可能で、 $S_n(x)$ が一様収束するときに等号が成立します。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ が成り立つときに等号が成立します。なお、不連続な点 x を含む関数の場合は、

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \rightarrow f(x)$$

と定義し直すことで、 $S_n(x)$ が一様収束し、パーセバルの等式が成り立ちます。もちろん、区分的に連続と区分的になめらかという条件が入ります。

補題 2.15 n を自然数とすると、等式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

証明

$$2 \cos kx \sin \frac{1}{2}x = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

より、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) \cdot \sin \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{1}{2}x + \left(\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x\right) + \left(\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right) + \left(\sin \frac{7}{2}x - \sin \frac{5}{2}x\right) + \cdots \right. \\ & \quad \left. + \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \end{aligned}$$

となる。両辺を $\sin \frac{1}{2}x$ で割ると

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

を得る。したがって、

$$\int_{-\pi}^0 \cos kx dx = \left[\frac{1}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^0 = 0$$

に注意して、上式の両辺を定積分すると

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2}x \right]_{-\pi}^0 = \frac{1}{2}$$

を得る。同様に、

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2}x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

を得る。 ■

補題 2.16 関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和 $S_n(x)$ を

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

とすると、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

と変形できる⁹。

証明

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku \, du \right) \cos kx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku \, du \right) \sin kx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos ku \cos kx + \sin ku \sin kx) \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos k(u-x) \, du \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \, du \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos k(u-x) \, du \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(u-x) \right) \, du \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、補題 2.15 の証明の前半部分から

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(u-x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)}$$

を得て、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(u-x)} \, du$$

⁹この積分を**ディリクレ (Dirichlet) 積分**といい、 $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$ を**ディリクレ (Dirichlet) 核**といいます。

と変形できる。さらに、 $t = u - x$ において変数変換すると、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

を得る。このとき、関数 $f(x)$ は周期 2π の関数であるから、1 周期であればどの区間で積分しても積分の値は変わらない。したがって、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

を得る。 ■

補題 2.17 関数 $f(x)$ が区分的に連続かつ区分的になめらかなとき、

$$\frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \text{ は } -\pi \leq t \leq 0 \text{ で、}$$

$$\frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \text{ は } 0 \leq t \leq \pi \text{ で、}$$

それぞれ区分的に連続である。

証明 関数 $f(x)$ が区分的に連続であるから、

$$\frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

は、任意の数 a ($-\pi < a < 0$) に対して、 $-\pi \leq t \leq a$ で区分的に連続である。 $t = -0$ については、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \quad (\because \lim_{h \rightarrow \pm 0} \frac{\sin h}{h} = 1) \end{aligned}$$

となる。ここで、関数 $f(x)$ が区分的になめらかであるから、

$$\lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{f(x-0+t) - f(x-0)}{t} = f'(x-0) \quad (\neq \pm\infty)$$

となる。したがって、与式は $-\pi \leq t \leq 0$ で区分的に連続である。同様に、

$$\frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

は $0 \leq t \leq \pi$ で区分的に連続である。 ■

準備が整ったので、フーリエ級数の収束を証明しましょう。次の定理を得ます。

定理 2.18 関数 $f(x)$ が周期 2π を持ち、区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続かつ区分的になめらかであれば、 $f(x)$ のフーリエ級数は、

- $f(x)$ が連続な点 x で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ が不連続な点 x で $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ に収束

する。

証明 関数 $f(x)$ のフーリエ級数の部分和を $S_n(x)$ とすると、補題 2.16 より、

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、補題 2.15 より、

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。上の 2 式から、① - ② を計算すると、

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t+x) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \quad \dots \textcircled{3} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、補題 2.17 より、

$$\frac{f(t+x) - f(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \text{ は } -\pi \leq t \leq 0, \quad \frac{f(t+x) - f(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \text{ は } 0 \leq t \leq \pi$$

で区分的に連続である。したがって、補題 2.14 より、 $n \rightarrow \infty$ のとき、③式と④式はそれぞれ 0 に収束する。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

を得る。なお、 $f(x)$ が連続な点 x の場合は、 $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$ が成り立ち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x)$$

を得る。 ■

それでは、**区分的に連続かつ区分的になめらかな関数の不連続点**におけるフーリエ級数の収束の様子を観察しておきましょう。例として、前に挙げた (p.34 参照)、周期 2π を持つ関数 (三角波)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0), \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

の不連続点におけるフーリエ級数の収束の様子を見て行きましょう。この関数の不連続点

$$x = 0 \quad \text{および} \quad x = \pi$$

において、

$$\text{左側極限 } f(x+0) \neq \infty \quad \text{および} \quad \text{右側極限 } f(x-0) \neq \infty$$

が存在し、導関数 $f'(x)$ の

$$\text{左側極限 } f'(x+0) \neq \infty \quad \text{および} \quad \text{右側極限 } f'(x-0) \neq \infty$$

も存在するため、関数 $f(x)$ は**区分的に連続かつ区分的になめらかな関数**となります。したがって、先ほど証明した定理 2.18 によって、これら不連続点で関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

に収束します。確認のため、この関数のフーリエ級数を求め、その部分

$$S_k(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^k \left(-\frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right)$$

のグラフを描いてみると、図 2.8 ($k = 1, 2, 10, 100$) のようになり、 k が大きくなるにつれて部分

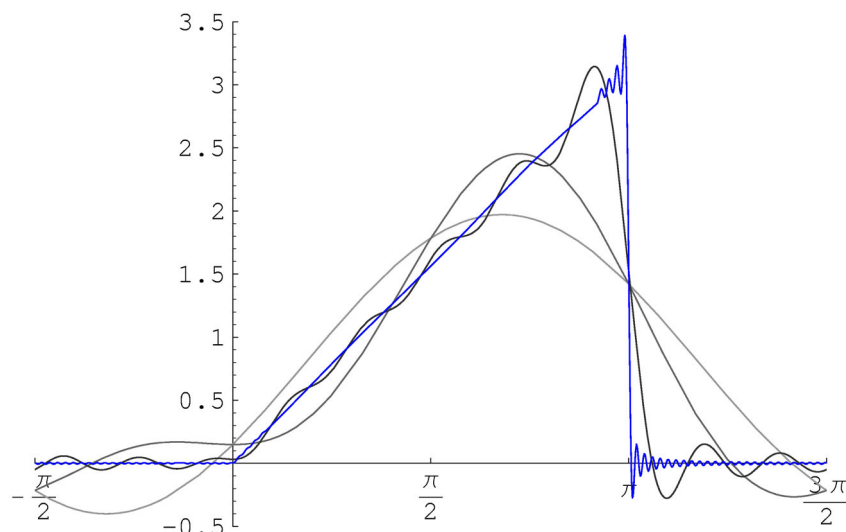


図 2.8: 不連続点における収束の様子 (1)

このとき、不連続点 $x = 0$ および $x = \pi$ の値について近似値を計算してみると表 2.4 のようになり、

$$S_k(0) \rightarrow 0 \quad \text{および} \quad S_k(\pi) \rightarrow \frac{\pi}{2} = 1.570796327 \dots \quad (k \rightarrow \infty)$$

に収束していることがわかります。

k	$S_k(0)$ の近似値	$S_k(\pi)$ の近似値
1	0.1487783910	1.422017936
2	0.1487783910	1.422017936
3	0.0780428607	1.492753466
10	0.0317263262	1.539070001
100	0.0031829927	1.567613334
1000	0.0003183097	1.570478017
10000	0.0000318309	1.570764496
∞	0.0000000000	1.570796327

表 2.4: 不連続点における近似値 (1)

もう 1 つの例として、図 2.9 のように半円を並べた周期 2 を持つ関数

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 < x \leq 1)$$

の不連続点におけるフーリエ級数の収束の様子を観察しておきましょう。

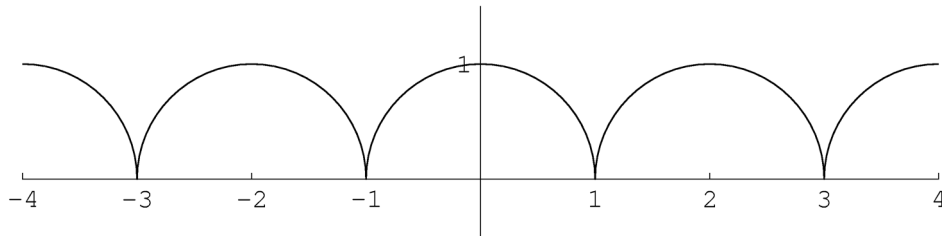


図 2.9: 区分的になめらかでない関数

この関数の不連続点

$$x = 1$$

において、

$$\text{左側極限 } f(1+0) = 0 \quad \text{および} \quad \text{右側極限 } f(1-0) = 0$$

が存在していることから、関数 $f(x)$ は区分的に連続な関数となりますが、同点において、導関数 $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ の

$$\text{左側極限 } f'(1+0) = -\infty \quad \text{および} \quad \text{右側極限 } f'(1-0) = -\infty$$

が存在していないことから、関数 $f(x)$ は**区分的になめらかでない**関数となります。したがって、この関数が定理 2.18 の条件を満たさないことから、関数 $f(x)$ のフーリエ級数は、

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

に収束するとは限りません。しかしながら、前例と同様に、この関数のフーリエ級数を求め¹⁰、その部分

$$S_k(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k\pi)}{n} \cos n\pi x$$

のグラフを描いてみると、図 2.10 ($k = 1, 2, 10, 100$) のようになり、 k が大きくなるにつれて部分 $S_k(x)$ が関数 $f(x)$ に収束していく様子が観察できます。ただし、 $J_m(z)$ は**ベッセル (Bessel) 関数**と呼ばれるもので、円柱対称系における微分方程式を解くために利用される関数です¹¹。

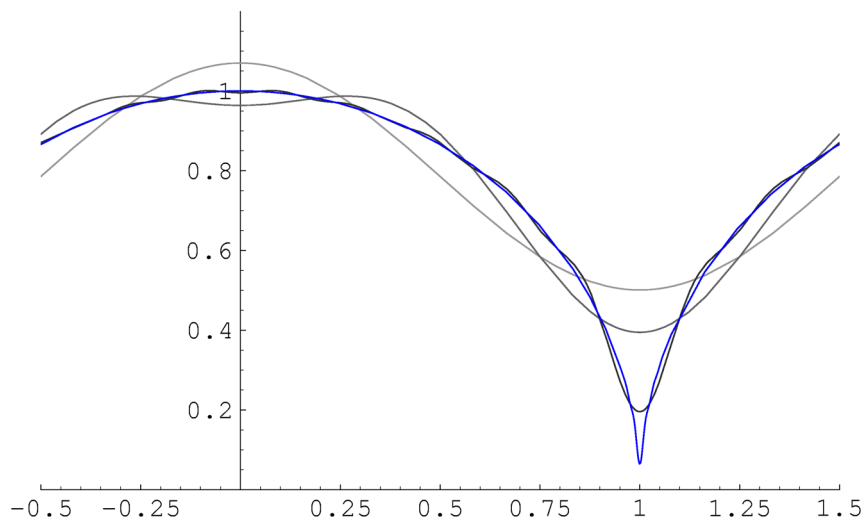


図 2.10: 不連続点における収束の様子 (2)

このとき、不連続点 $x = 1$ の値について近似値を計算してみると表 2.5 のようになり、

$$S_k(1) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

に収束していることがわかります (特別な例といえます)。

¹⁰区分的に連続であれば積分可能となり、とりあえずフーリエ級数展開できるため、収束するかしないかは別にしてフーリエ級数を得ることができます。

¹¹ベッセル関数 $J_m(z)$ は、微分方程式

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$$

の線形独立な解として与えられる関数です。ただし、 m は実数とします。

k	$S_k(1)$ の近似値
1	0.5007828202
2	0.3945915552
3	0.3356831555
10	0.1956704277
100	0.0634780940
1000	0.0201258528
10000	0.0063660132
∞	0.0000000000

表 2.5: 不連続点における近似値 (2)

(メモ用紙)

第3章 フーリエ変換

3.1 フーリエ積分とフーリエ変換

第2章では、周期を持つ関数のフーリエ級数について学びました。この章では、最初に、周期を持つ関数のフーリエ級数を拡張し、周期を持たない(一般的な)関数のフーリエ級数を導きましょう。具体的には、関数 $f(x)$ を区間 $-L \leq x \leq L$ で考え、この L を限りなく大きくするというアプローチを取ります ($L \rightarrow \infty$)。なお、ここで扱う関数 $f(x)$ は、 $(-\infty, \infty)$ で定義されていて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

を満足しているとします(もちろん、区分的に連続かつ区分的になめらかとします)。

まず、関数 $f(x)$ を周期 $2L$ を持つ関数と考え、区間 $-L \leq x \leq L$ でフーリエ級数展開すると、関数 $f(x)$ のフーリエ級数とフーリエ係数は、それぞれ、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right),$$
$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{k\pi}{L} t dt & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{k\pi}{L} t dt & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

となります。ここで、 $L \rightarrow \infty$ を考えることにします。 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$ に注意すれば、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} |a_0| = \lim_{L \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \right| \leq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M}{L} = 0$$

となり、 $a_0 = 0$ が得られます。さらに、 $\frac{\pi}{L} = \Delta u$ とおき、 $L \rightarrow \infty$ ($\Delta u \rightarrow 0$) を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \right) \cos \frac{n\pi}{L} x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta u}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta u}}^{\frac{\pi}{\Delta u}} f(t) \cos n\Delta u t dt \right) \cos n\Delta u x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos n\Delta u t dt \right) \cos n\Delta u x \right) \Delta u \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt \right) \cos ux du \quad (\because \text{区分求積法}) \end{aligned}$$

が得られます。同様に、

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta u}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta u}}^{\frac{\pi}{\Delta u}} f(t) \sin n\Delta u t dt \right) \sin n\Delta u x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin n\Delta u t dt \right) \sin n\Delta u x \right) \Delta u \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \right) \sin ux du \quad (\because \text{区分求積法}) \end{aligned}$$

が得られます。したがって、周期を持たない関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (フーリエ積分) は次の定理によって与えられます。

定理 3.1 周期を持たない関数 $f(x)$ の (三角関数による) フーリエ級数は、

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} A(u) \cos ux du + \int_0^{\infty} B(u) \sin ux du \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ただし、

$$\begin{cases} A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt, \\ B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

とする¹。なお、①式を関数 $f(x)$ の (三角関数による) フーリエ積分と呼ぶ。

続けて、①式を変形すると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^{\infty} (A(u) \cos ux + B(u) \sin ux) du \\ &= \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt \right) \cos ux + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \right) \sin ux \right) du \end{aligned}$$

¹ $A(u)$ と $B(u)$ は、周期を持つ関数をフーリエ級数展開した際に得られるフーリエ係数 a_n と b_n に相当します。

となり、さらに変形を続けると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) (\cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux) dt \right) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(x-t)u dt du \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\cos \theta = \cos(-\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

に注意すると、①式は、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{e^{i(x-t)u} + e^{-i(x-t)u}}{2} dt du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i(x-t)u} dt du + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)u} dt du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)v} dt dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)u} dt du \\ &\quad (\because u = -v \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)u} dt du \quad (\because v \text{ を } u \text{ とおき直す}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} dt \right) e^{iux} du \end{aligned}$$

と書き換えられます。したがって、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} dt$$

とおくと、次の定理が得られます (三角関数によるフーリエ積分を指数関数で表現し直した数式)。

定理 3.2 関数 $f(x)$ の (指数関数による) フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(u) e^{iux} du \quad \dots \textcircled{1}'$$

である。ただし、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} dt \quad \dots \textcircled{2}'$$

とする²。なお、②' 式を関数 $f(x)$ の **フーリエ変換** (Fourier transform) と呼ぶ。

また、①' 式と ②' 式の積分の形が対称的によく似ていることと、②' 式では関数 $f(x)$ を積分して関数 $F(u)$ が得られるのに対して ①' 式では関数 $F(u)$ を積分して関数 $f(x)$ が得られることから、①' 式 (フーリエ積分) を関数 $f(x)$ の **逆フーリエ変換** または **反転公式** と呼びます。

² $F(u)$ は、周期を持つ関数を複素フーリエ級数展開した際に得られる複素フーリエ係数 c_n に相当します。

これまで見てきたように、フーリエ積分 (逆フーリエ変換) およびフーリエ変換の表記方法には、三角関数による表現と指数関数による表現があります。以後、本テキストでは、基本的に、表現のシンプルな指数関数による表現で記述することにします (一般的な書籍も指数関数による表現が標準となっています)。ただし、三角関数による表現の方がシンプルな場合は、三角関数による表現で記述します。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を使って、互いに変換できるようにしておきましょう (p.15 参照)。

例として、区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めてみましょう。定理より、関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 1 \cdot e^{-iut} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-iu} e^{-iut} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u} \end{aligned}$$

となります。ここで、関数 $F(u)$ を調べるために、三角関数による表現に直すと、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(\cos(-u) + i \sin(-u) - 1)}{u} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos u - 1}{u} \end{aligned}$$

となります。 u を変数として、関数 $F(u)$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$ および虚部 $\operatorname{Im} F(u)$ のグラフを描くと図 3.1 のようになります。

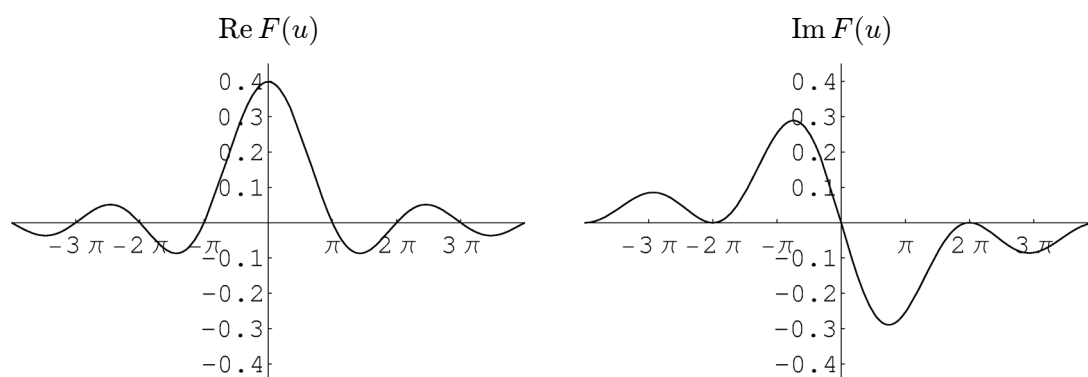


図 3.1: 関数 $F(u)$ の実部および虚部のグラフ

また、関数 $F(u)$ を波として捉えると、振幅の絶対値 $|F(u)|$ は、

$$\begin{aligned} |F(u)|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos u - 1}{u} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin^2 u + \cos^2 u - 2\cos u + 1}{u^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2 - 2\cos u}{u^2} = \frac{2}{\pi u^2} \cdot \frac{1 - \cos u}{2} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\ &= \frac{2}{\pi u^2} \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2} \right) = \frac{2}{\pi u^2} \sin^2 \frac{u}{2} \quad (\because \text{半角の公式}) \end{aligned}$$

より、

$$|F(u)| = \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{u}{2}}{u} \right|$$

となり、偏角 θ は、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos u - 1}{u} \right) \bigg/ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \right) = \left(-\frac{1 - \cos u}{2} \right) \bigg/ \left(\frac{\sin u}{2} \right) \\ &= \left(-\sin^2 \frac{u}{2} \right) \bigg/ \left(\sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \right) \quad (\because \text{半角の公式}) \\ &= -\tan \frac{u}{2} = \tan \left(-\frac{u}{2} \right) \end{aligned}$$

より、区間 $2n\pi \leq u < 2(n+1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) において、

$$\theta = -\frac{u}{2} + n\pi$$

となります³。 u を変数として、関数 $F(u)$ の振幅の絶対値 $|F(u)|$ および偏角 θ のグラフを描くと図 3.2 のようになります。

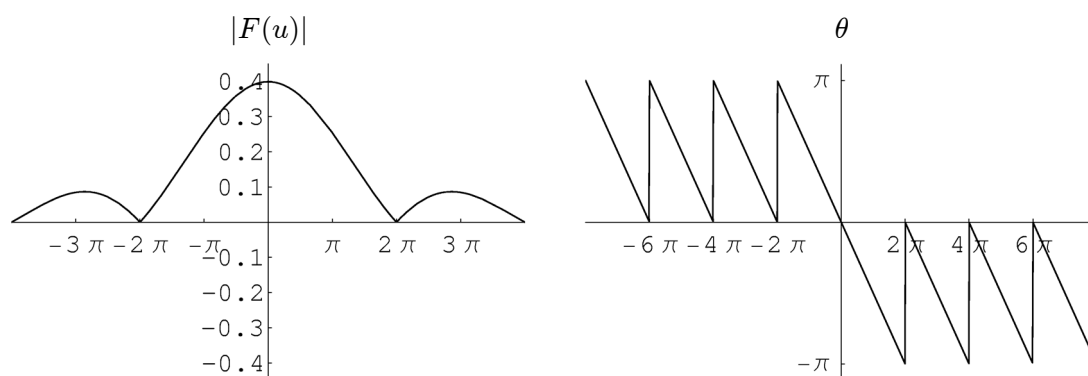


図 3.2: 関数 $F(u)$ の振幅および偏角のグラフ

このような考察は、フーリエ変換を用いて波を解析する上で非常に重要となります。これからも、ここに描かれたグラフによく似たグラフがたくさん現れるので注目するようにしましょう。

³図 3.2 の偏角 θ のグラフの線はつながっていますが、実際には、点 $u = 2n\pi$ における θ の値は 0 となります。

フーリエ級数の場合と同様に、関数が偶関数の場合と奇関数の場合のフーリエ積分を求めると、以下の系が得られます。

系 3.3 偶関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(u) \cos ux \, du$$

である。ただし、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt$$

とする。なお、 $C(u)$ を **フーリエ余弦変換** と呼ぶ。

証明 定理 3.1 より、フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du$$

である。ここで、関数 $f(x)$ が偶関数 ($f(-x) = f(x)$) であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \cos ut \, dt + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= \int_{\infty}^0 f(-s) \cos u(-s) (-ds) + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \int_0^\infty f(-s) \cos(-us) \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= \int_0^\infty f(s) \cos us \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \quad (\because \cos ux \text{ は偶関数}) \\ &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \sin ut \, dt + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \\ &= \int_{\infty}^0 f(-s) \sin u(-s) (-ds) + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \\ &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \int_0^\infty f(-s) \sin(-us) \, ds + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \\ &= - \int_0^\infty f(s) \sin us \, ds + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \quad (\because \sin ux \text{ は奇関数}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt$$

とおけば、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(u) \cos ux \, du$$

が得られ、証明が完了する。 ■

系 3.4 奇関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(u) \sin ux \, du$$

である。ただし、

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt$$

とする。なお、 $S(u)$ を **フーリエ正弦変換** と呼ぶ。

証明 偶関数と同様に証明する。定理 3.1 より、フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du$$

である。ここで、関数 $f(x)$ が奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \cos ut \, dt + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= \int_\infty^0 f(-s) \cos u(-s) (-ds) + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \int_0^\infty f(-s) \cos(-us) \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= - \int_0^\infty f(s) \cos us \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \quad (\because \cos ux \text{ は偶関数}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \sin ut \, dt + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
 &= \int_{\infty}^0 f(-s) \sin u(-s) (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
 &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
 &= \int_0^{\infty} f(-s) \sin(-us) \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(s) \sin us \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \quad (\because \sin ux \text{ は奇関数}) \\
 &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt$$

とおけば、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(u) \sin ux \, du$$

が得られ、証明が完了する。 ■

また、次のような系も得られます⁴。

系 3.5

- (1) 関数 $f(x)$ が偶関数ならば、 $C(u) = F(u)$ が成り立つ。
- (2) 関数 $f(x)$ が奇関数ならば、 $S(u) = iF(u)$ が成り立つ。

⁴関数 $F(u)$ を実部 ($\cos$ 波形) と虚部 ($\sin$ 波形) のベクトルで構成された波として捕らえれば、 $F(u)$ に i を掛けることは、各ベクトルの位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ進ませることに他なりません。したがって、 $F(u)$ が実部のみからなるベクトルの場合は、それ自身が実軸への像となり、 $C(u)$ に一致します。一方、 $F(u)$ が虚部のみからなるベクトルの場合は、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ進ませ、これが実軸への像となり、 $S(u)$ に一致します。

証明 (1) を証明する。

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\infty}^0 f(-s) e^{-iu(-s)} (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(s) e^{ius} ds + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \quad (\because f(-x) = f(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) (e^{iut} + e^{-iut}) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{e^{iut} + e^{-iut}}{2} dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt = C(u) \\
&\quad \therefore C(u) = F(u).
\end{aligned}$$

(2) を証明する。

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\infty}^0 f(-s) e^{-iu(-s)} (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} -f(s) e^{ius} ds + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \quad (\because f(-x) = -f(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} -f(t) e^{iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) (-e^{iut} + e^{-iut}) dt = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{e^{iut} - e^{-iut}}{2i} dt \\
&= -i \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt = -i \cdot S(u) \\
&\quad \therefore S(u) = iF(u).
\end{aligned}$$

■

定理 3.1・系 3.3・系 3.4 をまとめると下表のようになります。

	フーリエ積分	フーリエ変換
関数	$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du$	$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$
偶関数	$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux du$	$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos ux dx$
奇関数	$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(u) \sin ux du$	$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin ux dx$

* フーリエ変換の数式は、 $t = x$ において変数変換した数式で、標準的な書き方です。

表 3.1: フーリエ積分 (逆フーリエ変換) とフーリエ変換

【注意】 フーリエ積分とフーリエ変換を求める数式は、書籍によって多少異なりますが、本質的には同じ数式です。ノルムの取り方と変数変換によって、いずれの数式にも書き換えることができ、各分野や各書籍に適した数式として表現されています。数式処理ソフト Mathematica では、以下のように定義されています。

$$\begin{cases} f(v) \sim \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ibuv} du & (\text{フーリエ積分}), \\ F(u) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{ibuv} dv & (\text{フーリエ変換}) \end{cases}$$

- $(a, b) = (0, 1)$: 標準, 現代物理学
- $(a, b) = (1, -1)$: 純粋数学, システム工学
- $(a, b) = (1, 1)$: 古典物理学
- $(a, b) = (0, -2\pi)$: 信号処理

例題 1 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

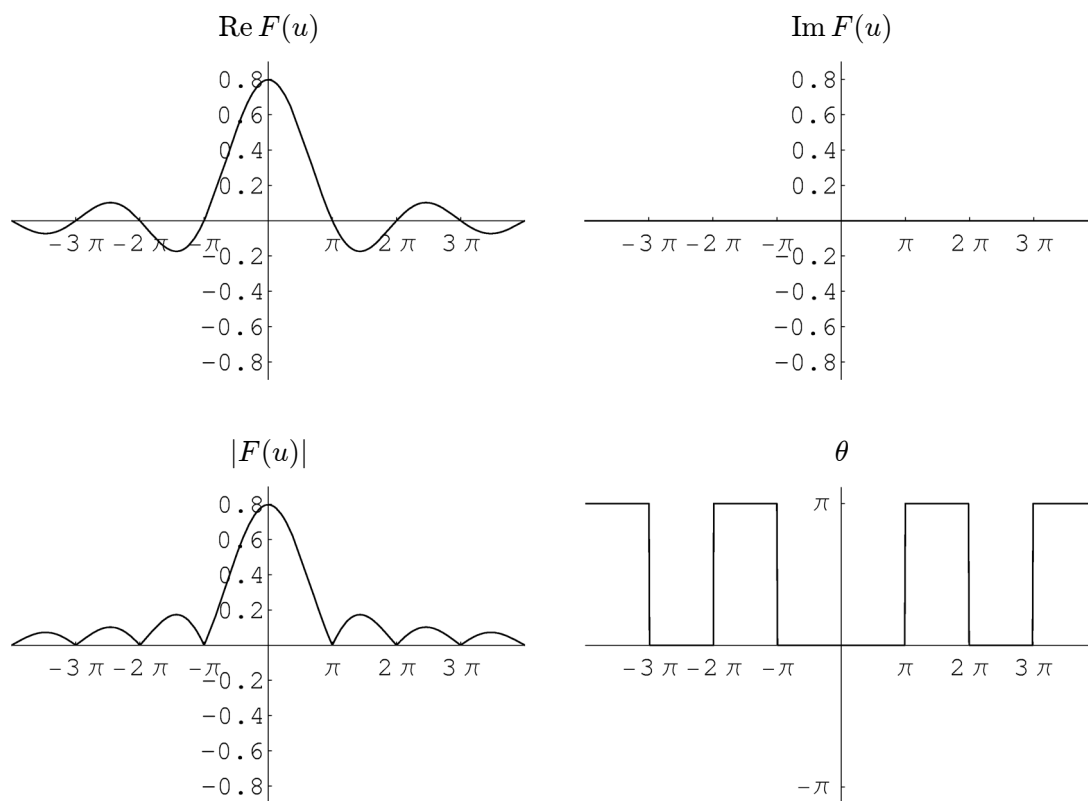
のフーリエ余弦変換を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$\begin{aligned} C(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \cos ut \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $F(u) (= C(u))$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$, 虚部 $\operatorname{Im} F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます ($\because$ 系 3.5 より $F(u) = C(u)$)。



例題 2 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -1), \\ -1 & (-1 < x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (0 < x < 1), \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

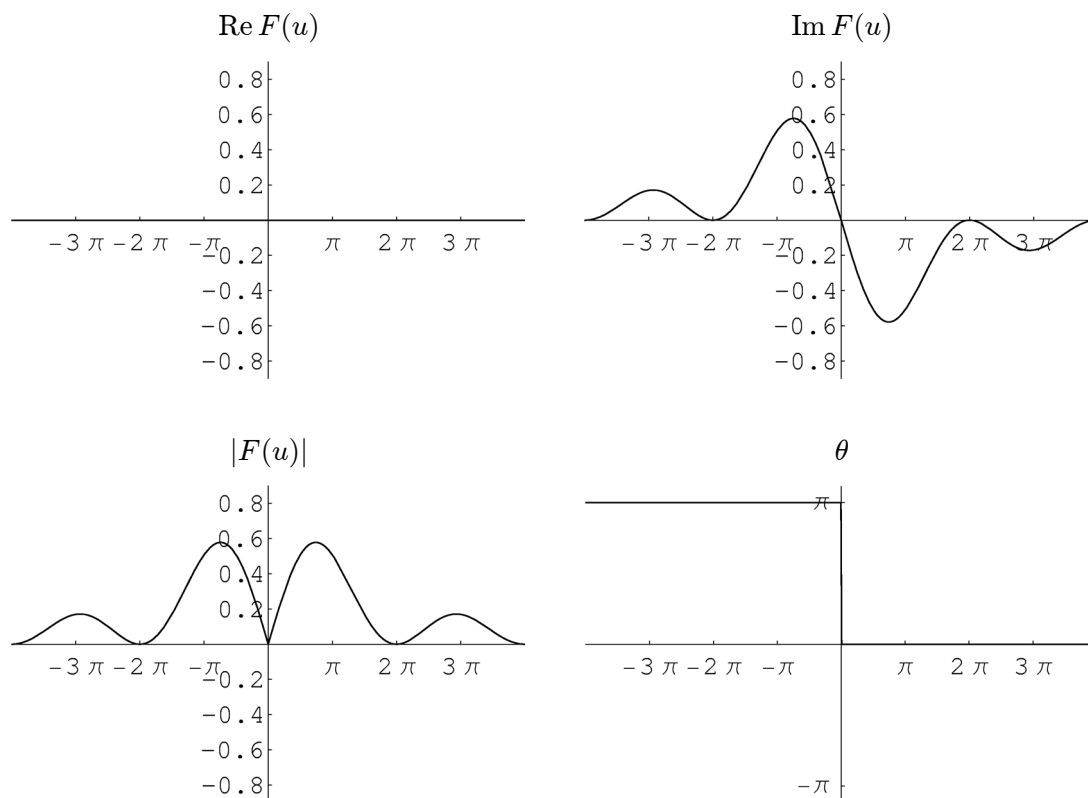
のフーリエ正弦変換を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換 $S(u)$ は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \sin ut \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{-\cos ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos u}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $F(u) (= -iS(u))$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$, 虚部 $\operatorname{Im} F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます ($\because$ 系 3.5 より $F(u) = -iS(u)$)。



例題 3 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 2), \\ 1 & (2 \leq x \leq 3), \\ 0 & (x > 3) \end{cases}$$

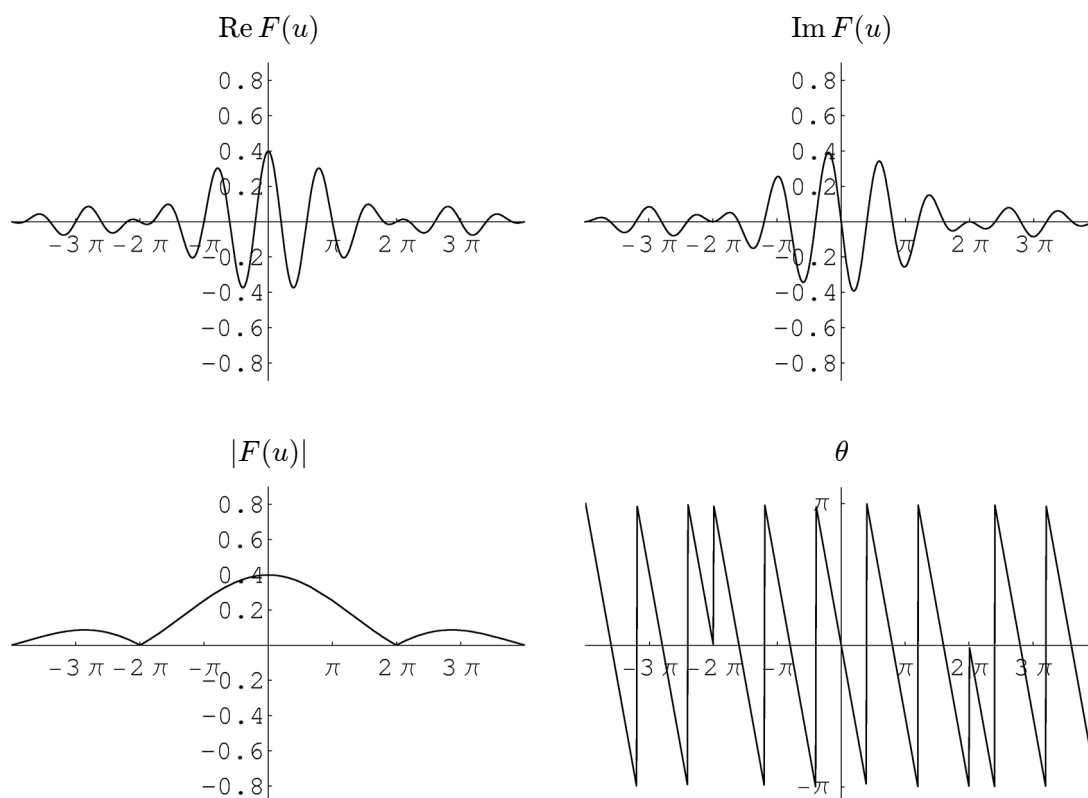
のフーリエ変換を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_2^3 1 \cdot e^{-iut} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iut}}{-iu} \right]_2^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(e^{-i3u} - e^{-i2u})}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $F(u)$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$, 虚部 $\operatorname{Im} F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます。



3.2 フーリエ積分の収束

フーリエ積分の収束についてもフーリエ級数の収束と同様に次の定理が成り立ちます。

定理 3.6 関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に連続かつ区分的になめらかで、さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

を満たしているとき、関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

- $f(x)$ が連続な点 x で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ が不連続な点 x で $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ に収束

する。

証明 フーリエ級数の収束の場合とほとんど同じなので、証明は省略します。 ■

上の定理より、次の系が直ちに得られます。

系 3.7 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(u)$ とすると、等式

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du$$

が成り立つ。

ここで、関数 $f(x)$ をフーリエ変換 $F(u)$ し、さらに、逆フーリエ変換することを考えてみましょう。前節で挙げた例で試してみると、関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u}$$

でしたから、逆フーリエ変換 $f(x)$ は、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u} \right) e^{iux} du$$

を解けばよいことがわかります。しかしながら、これを直接解くことは非常に困難です。ところが、定理 3.6 に注意すれば、フーリエ積分によって得られた $f(x)$ は、不連続な点以外では元の関

数 $f(x)$ に一致することから、不連続な点のみ系 3.7 を使って値を修正すれば、逆フーリエ変換 $f(x)$ を容易に得ることができます。具体的には、例の場合、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u} \right) e^{iux} du = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{1}{2} & (x = 0), \\ 1 & (0 < x < 1), \\ \frac{1}{2} & (x = 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

とすればよいことがわかります $\left(\cdot \cdot \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \right)$ 。

例題 1 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

のフーリエ余弦変換を利用して、定積分

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} du$$

の値を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$\begin{aligned} C(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \cos ut dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

であるから、逆フーリエ余弦変換 $f(x)$ は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} du$$

となる。したがって、系 3.7 より、以下のように定積分の値が求まる。

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} du = \begin{cases} 1 & (|x| < 1), \\ \frac{1}{2} & (|x| = 1), \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

例題 2 次の方程式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$$\int_0^\infty f(x) \cos xt \, dt = \begin{cases} 1-x & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1). \end{cases}$$

解答例 関数 $f(x)$ を偶関数と考えると、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-u) & (0 \leq u \leq 1), \\ 0 & (u > 1) \end{cases}$$

とおく (フーリエ余弦変換が与えられている)。このとき、逆フーリエ余弦変換は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(u) \cos ux \, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-u) \right) \cos ux \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-u) \cos ux \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[(1-u) \frac{\sin ux}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \cdot \frac{\sin ux}{x} \, du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{x} \int_0^1 \sin ux \, du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \left[\frac{-\cos ux}{x} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

となる。また、 $C(u)$ の不連続な全ての点 u で $C(u) = C(u+0) = C(u-0)$ が成り立ち、逆フーリエ余弦変換と求める関数 $f(x)$ は一致する。したがって、

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

となる。

* フーリエ積分 (逆フーリエ変換) とフーリエ変換は対称的な式であることから、フーリエ積分の収束と同様に、フーリエ変換の収束について

$$\frac{F(u+0) + F(u-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} \, dt$$

が成り立ちます (もちろん、同じ条件を与えた上で)。

例題 3 等式

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2} du = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

が成り立つことを証明しなさい。

解答例 奇関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

とする。このとき、関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin t \sin ut \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi -\frac{1}{2} (\cos(t+ut) - \cos(t-ut)) \, dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi (\cos(1+u)t - \cos(1-u)t) \, dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1+u)t}{1+u} - \frac{\sin(1-u)t}{1-u} \right]_0^\pi \\ &\quad \vdots \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi u}{1-u^2} \end{aligned}$$

となる。さらに、関数 $f(x)$ の逆フーリエ正弦変換を求めると、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(u) \sin ux \, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi u}{1-u^2} \right) \sin ux \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2} \, du \end{aligned}$$

となる。また、 $f(x)$ の不連続な全ての点 x で $f(x) = f(x+0) = f(x-0)$ が成り立ち、逆フーリエ正弦変換と元の関数 $f(x)$ は一致する。ゆえに、等式

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2} du = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

が成り立つ。



3.3 波のフーリエ変換

この節では、波 (信号値; 観測値) $x(t)$ のフーリエ変換を導き、フーリエ変換の持つ意味や利点について考察しましょう。

まず、定理 3.2 のフーリエ積分およびフーリエ変換より、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) e^{iux} du$$

でしたから、関数 $f(x)$ を波 $x(s)$ (変数 x も変数 s [秒] に書き換える) に置き換え、 u を角速度 ω [rad/秒] に書き換えて整頓すると、

$$x(s) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega s} d\omega$$

となります。ここで、角速度 ω [rad/秒] は、周波数 f [Hz] を使って、

$$\omega = 2\pi f \quad (d\omega = 2\pi df)$$

と表せたので、さらに与式を変数変換すると、

$$x(s) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right) e^{i2\pi fs} df$$

となります。したがって、

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

とおくと、波 $x(t)$ のフーリエ積分 (変数 s [秒] を変数 t [秒] に書き換える)

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

が得られます。以上をまとめると、**波のフーリエ積分**および**波のフーリエ変換**は、

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (\text{波のフーリエ積分})$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{波のフーリエ変換})$$

となります。すなわち、この2つの式によって**時間領域** $x(t)$ と**周波数領域** $X(f)$ を自由に行き来することが可能となります。特に、波 $x(t)$ のフーリエ変換では、波 $x(t)$ の特徴を明確に捉えることを可能にします。具体的には、**波を構成する三角関数とその周波数 (角速度)・振幅・初期位相がわかります** (このあとに、例を使って示します)。なお、調べたい区間 (波の一部または全体) を積分区間としてフーリエ変換することで、調べたい区間の波の特徴を調べることができます。例えば、図 3.3 のように観測開始 ($t = 0$ [秒]) から観測終了 ($t = T'$ [秒]) までに波 $x(t)$ が得られたとすると、区間 $[0, T']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば観測区間全体の波の特徴を調べることができますし、 a [秒] から b [秒] までの区間を切り取り、区間 $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq T'$) を積分区間としてフーリエ変換すれば区間 $[a, b]$ の波の特徴を調べることができます ($T'' = b - a$)。ま

た、図 3.4 のような周期を持つ波の特徴を調べるには、1 周期 T''' [秒] 分、すなわち区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば周期を持つ波の特徴を調べることができます⁵。

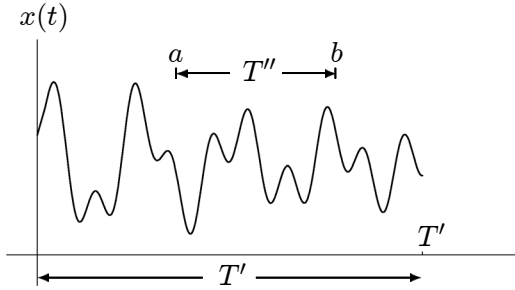


図 3.3: 一般的な波

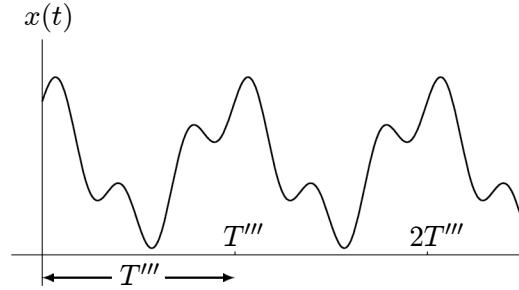


図 3.4: 周期を持つ波

ただし、ここで注意しておかなければならないことは、前記のように周期 T_0 [秒] (T' , T'' , T''' など) を持つ波 $x(t)$ として捉えたとき、区間 $[0, T_0]$ を積分区間としてフーリエ変換 $X(f)$ すると、各周波数ごとの振幅 (スペクトル⁶) は T_0 [秒] 間分を積算した振幅となってしまうことです。そこで、新たに**周波数スペクトル密度**

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{周波数スペクトル密度})$$

を定義し、単位時間 (1 [秒]) あたりのスペクトルとして波の特徴を調べることにします⁷。

3.3.1 cos 波形の波のフーリエ変換

では、最も基本的な cos 波形の波

$$x(t) = A \cos 2\pi t$$

⁵周期を持つ波 $x(t)$ の場合、全区間を積分区間としてフーリエ変換すると無限大になり、まともに計算することができません。しかしながら、周期 T''' に限定し、区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば、フーリエ変換の条件

$$\int_0^{T'''} |x(t)| dt = M < \infty$$

を満たし、有限の値が得られます。なお、周期を持つ波を区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換し、波の特徴を調べ、三角関数で表すと、全区間に拡張された周期を持つ波として再現されます (フーリエ積分してしまうと元の 1 周期 T''' 分の波しか現れない)。実は、この再現された波 (周期関数) は、当然ではあるが、周期 T''' の周期関数をフーリエ級数展開して得られるフーリエ級数と一致します (元々、フーリエ級数を拡張したものがフーリエ積分であった)。逆に、前者を周期 T' または周期 T'' を持つ波として捉えて、フーリエ変換し、波の特徴を調べ、三角関数で表すと、それぞれ周期 T' または周期 T'' を持つ波として再現されます (時間領域の全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張される)。ただし、この場合の有効範囲 (区間) は、それぞれ区間 $[0, T']$ または区間 $[a, b]$ となります。

⁶フーリエ解析では、スペクトル (spectrum) は周波数ごとの振幅の大きさ指します。

⁷フーリエ積分する際は、元の $X(f)$ を使用します。

をフーリエ変換してみましょう。この波⁸は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 (A \cos 2\pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos u)e^{-ifu} du \quad (\because u = 2\pi t \text{ とおき、変数変換}) \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\cos u)e^{-ifu} du &= (\sin u)e^{-ifu} - \int (\sin u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \\ &= (\sin u)e^{-ifu} + if \int (\sin u)e^{-ifu} du \\ &= (\sin u)e^{-ifu} + if \left((-\cos u)e^{-ifu} - \int (-\cos u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \right) \\ &= (\sin u)e^{-ifu} + if \left((-\cos u)e^{-ifu} - if \int (\cos u)e^{-ifu} du \right) \\ &= (\sin u)e^{-ifu} - if(\cos u)e^{-ifu} - (if)^2 \int (\cos u)e^{-ifu} du \end{aligned}$$

より、

$$\int (\cos u)e^{-ifu} du = \frac{1}{1-f^2} \left((\sin u)e^{-ifu} - if(\cos u)e^{-ifu} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{1}{1-f^2} \left((\sin u)e^{-ifu} - if(\cos u)e^{-ifu} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{(0 - if e^{-i2\pi f}) - (0 - if)}{1-f^2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1-f^2} = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2\pi f^2}{1-f^2} \left(\frac{\sin 2\pi f}{2\pi f} + i \frac{1 - \cos 2\pi f}{2\pi f} \right) \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1-f^2}$$

⁸この波を特徴付けるパラメータは、振幅 A 、角速度 $\omega = 2\pi$ [rad/秒]、初期位相 $\phi = 0$ [rad]、周期 $T_0 = 1$ [秒]、周波数 $f_0 = 1/T_0 = 1$ [Hz] となっています。併せて、以下の関係式を復習しておきましょう。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.5 のようになります。

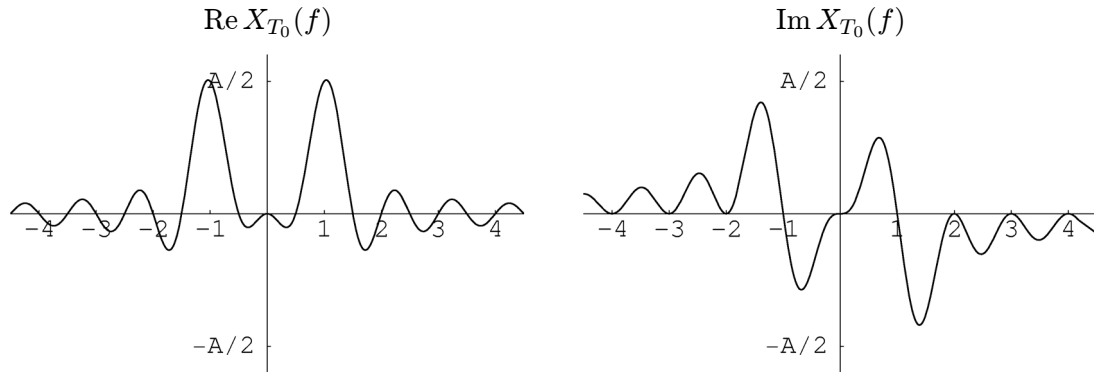


図 3.5: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = A \cos 2\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 1 を除く $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 1) = \pm 2\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています ($\cos$ 波形の波は $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフに現れる)。なお、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の値は、 $X_{T_0}(f)$ の極限が $\frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{i(1 - e^{-i2\pi f}) + if(-(-i2\pi)e^{-i2\pi f})}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \frac{A}{2} \quad \leftarrow \text{極座標表示による } \cos \text{ 波形の波は実部のみ} \end{aligned}$$

となります。したがって、 $\cos$ 波形の波が初期位相 0 [rad] であることに注意し、

$$A \cos \theta = A \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{A}{2} e^{i\theta} + \frac{A}{2} e^{i(-\theta)} \quad (\theta = 0 \text{ とする})$$

と考えれば ($\cos$ 波形の波の振幅を求める公式: $\text{Re } X_{T_0}(f) + \text{Re } X_{T_0}(-f)$)、

$$\text{Re } X_{T_0}(1) + \text{Re } X_{T_0}(-1) = \text{Re} \left(\frac{A}{2} \right) + \text{Re} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$$

が振幅となります。以上より、元の関数

$$x(t) = A \cos 2\pi t$$

が導き出されます⁹。

⁹ここでは、初期位相について何も触れていませんが、この後の初期位相を持つ波のフーリエ変換で詳しく述べることにします。また、このような考察は、実は、周期 1 [秒] を持つ波 $x(t)$ のフーリエ級数を求めていることに他なりません。事実、フーリエ係数 $a_2 = A$ かつそれ以外のフーリエ係数が 0 となるフーリエ級数となっています。なお、波 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ をフーリエ積分してしまうと 1 周期分の $\cos$ 波形の波しか現れないことに注意しましょう。

3.3.2 sin 波形の波のフーリエ変換

続いて、cos 波形の波のフーリエ変換に習って、最も基本的な sin 波形の波

$$x(t) = B \sin 2\pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。この波は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 (B \sin 2\pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin u)e^{-ifu} du \quad (\because u = 2\pi t \text{ とおき、変数変換}) \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\sin u)e^{-ifu} du &= (-\cos u)e^{-ifu} - \int (-\cos u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if \int (\cos u)e^{-ifu} du \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if \left((\sin u)e^{-ifu} - \int (\sin u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \right) \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if \left((\sin u)e^{-ifu} + if \int (\sin u)e^{-ifu} du \right) \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if(\sin u)e^{-ifu} - (if)^2 \int (\sin u)e^{-ifu} du \end{aligned}$$

より、

$$\int (\sin u)e^{-ifu} du = \frac{1}{1-f^2} \left((-\cos u)e^{-ifu} - if(\sin u)e^{-ifu} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{B}{2\pi} \left[\frac{1}{1-f^2} \left((-\cos u)e^{-ifu} - if(\sin u)e^{-ifu} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{(-e^{-i2\pi f} + 0) - (-1 + 0)}{1-f^2} \\ &= \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1-f^2} = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{2\pi f}{1-f^2} \left(\frac{1 - \cos 2\pi f}{2\pi f} + i \frac{\sin 2\pi f}{2\pi f} \right) \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1-f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.6 のようになります。

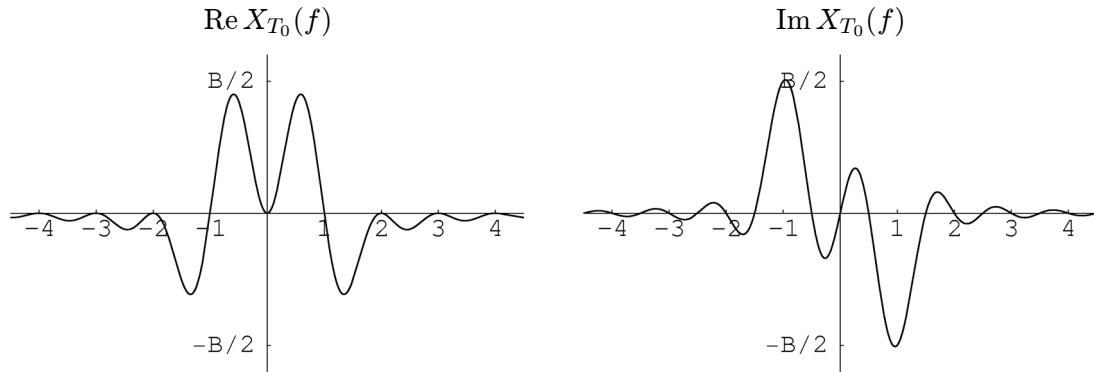


図 3.6: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = B \sin 2\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 1 を除く $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 1) = \pm 2\pi$ [rad/秒] の $\sin$ 波形の波から構成されていることを表しています ([sin 波形の波は \$\text{Im } X_{T_0}\(f\)\$ のグラフに現れる](#))。なお、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の値は、 $X_{T_0}(f)$ の極限が $\frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{-(-i2\pi)e^{-i2\pi f}}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \mp i \frac{B}{2} \quad (\text{符号同順}) \quad \leftarrow \text{極座標表示による sin 波形の波は虚部のみ} \end{aligned}$$

となります。したがって、[sin 波形の波が初期位相 \$-\frac{\pi}{2}\$ \[rad\] であることに注意し、](#)

$$B \sin \theta = B \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{B}{2} e^{i\theta} + i \frac{B}{2} e^{i(-\theta)} \quad (\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ とする})$$

と考えれば ([sin 波形の波の振幅を求める公式: \$-\text{Im } X_{T_0}\(f\) + \text{Im } X_{T_0}\(-f\)\$](#))、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -\text{Im} \left(-i \frac{B}{2} \right) + \text{Im} \left(i \frac{B}{2} \right) = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = B$$

が振幅となります。以上より、元の関数

$$x(t) = B \sin 2\pi t$$

が導き出されます¹⁰。

¹⁰ここでも、初期位相について何も触れていませんが、この後の初期位相を持つ波のフーリエ変換で詳しく述べることにします。また、 $\cos$ 波形の波のフーリエ変換と同様に、このような考察は、周期 1 [秒] を持つ波 $x(t)$ のフーリエ級数を求めていることに他なりません。事実、フーリエ係数 $b_2 = B$ かつそれ以外のフーリエ係数が 0 となるフーリエ級数となっています。同じことですが、波 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ をフーリエ積分してしまうと 1 周期分の $\sin$ 波形の波しか現れないことに再び注意しましょう。

3.3.3 周期 T_0 を持つ波のフーリエ変換

これまでの波は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波でしたが、周期を変えた波のフーリエ変換では、どのような違いがあるのか検証しましょう。例えば、周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos \pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。この波を区間 $[0, 2]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^2 (\cos \pi t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.7 のようになります。

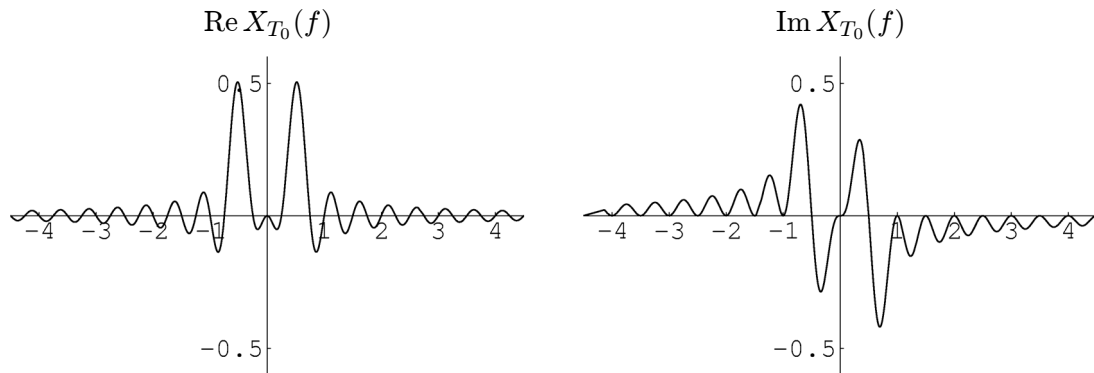


図 3.7: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos \pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 0.5 を除く $0, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 0.5) = \pm \pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています (角速度が半分になる)。なお、振幅は $\cos$ 波形の波のフーリエ変換に習って求めると 1 となります。したがって、元の関数

$$x(t) = \cos \pi t$$

が導き出されます。

理解を深めるために、周期 $T_0 = \frac{1}{2} = 0.5$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

もフーリエ変換してみましょう。この波を区間 $[0, \frac{1}{2}]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\cos 4\pi t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i(f/2) \cdot (1 - e^{-i2\pi(f/2)})}{1 - (f/2)^2}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(f/2) \cdot (1 - e^{-i2\pi(f/2)})}{1 - (f/2)^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.8 のようになります。

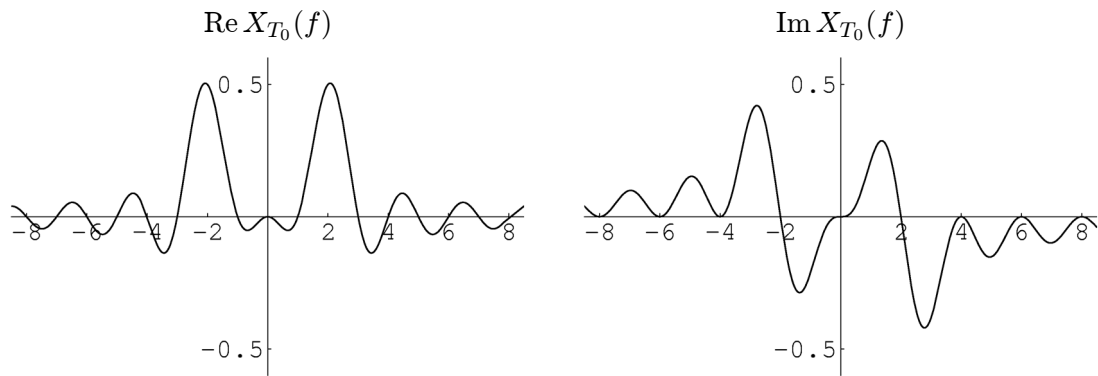


図 3.8: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos 4\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 2 を除く $0, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 2) = \pm 4\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています (角速度が 2 倍になる)。なお、振幅は $\cos$ 波形の波のフーリエ変換に習って求めると 1 となります。したがって、元の関数

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

が導き出されます。

この2つの例を $\cos$ 波形の波 $x(t) = A \cos 2\pi t$ と比較すると、2つの例の周波数スペクトル密度のグラフは、 $\cos$ 波形の波 $x(t) = A \cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフを横軸に $\frac{1}{T_0}$ 倍したグラフに他ならないことがわかります。したがって、ある波に対して、フーリエ変換の対象となる区間 (調べたい区間; 周期) T_0 [秒] が与えられると、その波の基準となる周波数 $f_0 = \frac{1}{T_0}$ [Hz] が決まります。すなわち、 nf_0 [Hz] ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) について調べれば、ある波の特徴を十分に捉えることができるわけです。この事実は非常に重要で、第4章の離散フーリエ変換 (デジタルフーリエ変換; 高速フーリエ変換) のサンプリングや分解能といった言葉の直接の概念を指しています。大げさですが、離散という言葉の要であるといっても過言ではないでしょう。

3.3.4 合成された波のフーリエ変換

これまで、個々の三角関数 (波) のフーリエ変換を見てきました。この節では、複数の三角関数の1次結合によって合成された波のフーリエ変換について考察しましょう (これがフーリエ変換の最大の特徴と言ってもよい)。例として、図3.9の周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。

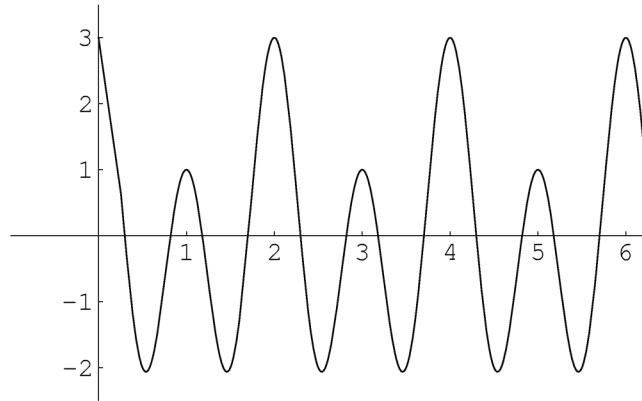


図 3.9: 合成された波のグラフ ($x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$)

この波を区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^2 (\cos \pi t + 2 \cos 2\pi t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} + 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if \cdot (1 - e^{-i2\pi f \cdot 2})}{1 - f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} + \frac{if \cdot (1 - e^{-i2\pi f \cdot 2})}{1 - f^2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.10 のようになります。

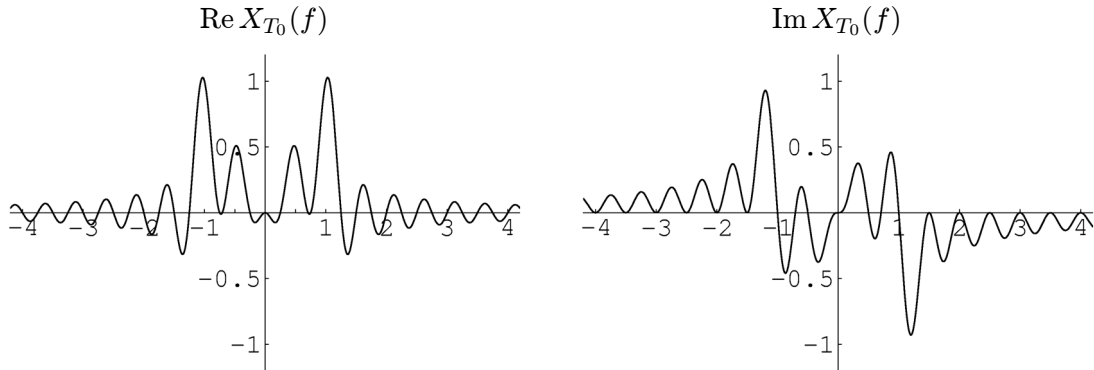


図 3.10: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$)

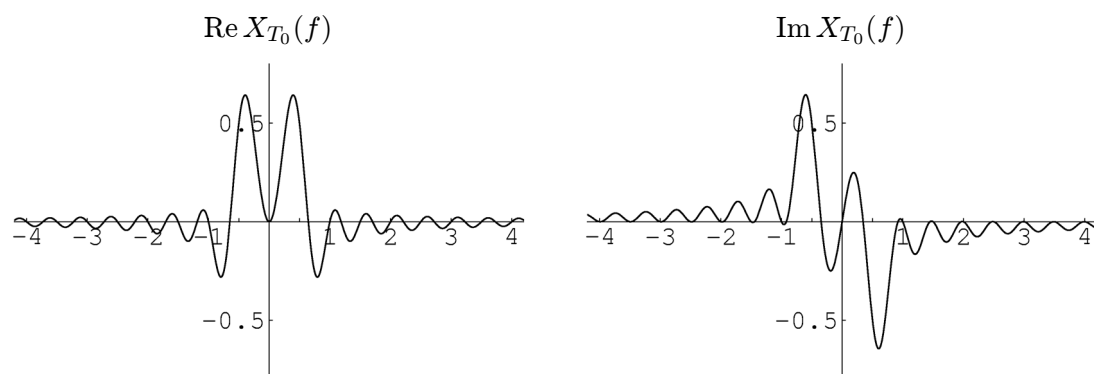
ここで、波 $x(t)$ の特徴を調べるために、各周波数の $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および $\text{Im } X_{T_0}(f)$ の値を求めましょう。なお、前節の考察から、基準となる周波数を $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] として各周波数 nf_0 ($n = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$) について調べれば十分です。グラフを読むと、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ では、周波数 f [Hz] が $\pm 0.5, \pm 1$ を除く $0, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ では、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f_1 = \pm 0.5$ および $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega_1 = \pi$ および $\omega_2 = 2\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています (**周波数ごとに異なった三角関数の波となる**)。詳しい計算は省略しますが、それぞれ振幅 1 および 2 が求まり、元の関数

$$x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$$

が求められます。なお、①式の前項が $\cos \pi t$ をフーリエ変換した式であり、次項が $\cos 2\pi t$ をフーリエ変換した式であることを利用すれば比較的楽に計算できます。このことは、波 $\cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフが、波 $\cos \pi t$ と波 $\cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフを重ね合わせたものとなっていることでも確認できます。

以上の考察から、フーリエ変換によって、波を構成する三角関数を知ることができます。言い換えれば、フーリエ変換は、波を三角関数に分離することを可能にします。このテキストでは三角関数しかフーリエ変換しませんでした。もちろん、(周期を持たない) 一般の関数をフーリエ変換することができます。これは、つまり、一般の関数が三角関数の重ね合わせとして表せることを意味しています。すなわち、一般の関数のフーリエ級数が得られることになります。この利点を活かして、現代社会では、フーリエ変換の理論が様々なところで使われています。特に、コンピュータの登場によって、第 4 章で学ぶ離散フーリエ変換は活躍の場を更に広げています。

例題 1 周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 2]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	∓ 0.5	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 2$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] である。したがって、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm \pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\cos$ 波形の波を含み、その振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(0.5) + \text{Re } X_{T_0}(-0.5) = 0.5 + 0.5 = 1$$

となる。同様に、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm \pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、その振幅は、

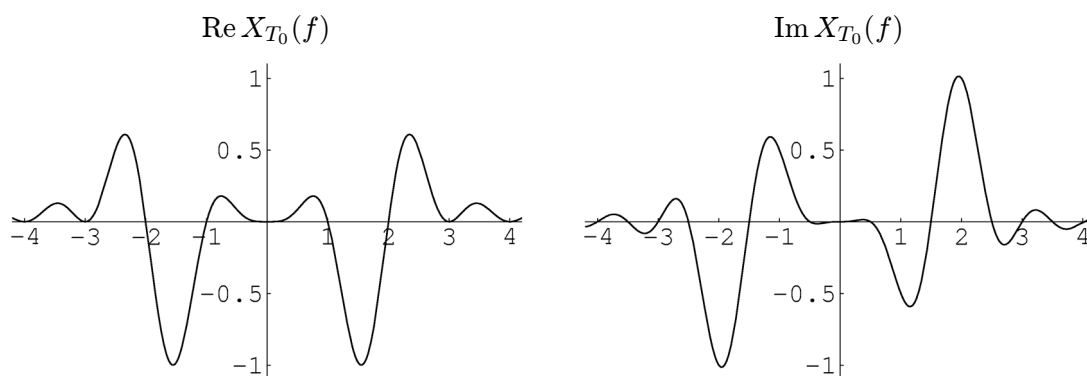
$$-\text{Im } X_{T_0}(0.5) + \text{Im } X_{T_0}(-0.5) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos \pi t + \sin \pi t$$

である。

例題 2 周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	$\frac{4}{15\pi}$	0	$-\frac{108}{35\pi}$	0	$\frac{100}{63\pi}$	0	$\frac{196}{495\pi}$	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	0	∓ 0.5	0	± 1	0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。したがって、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で $\text{Re } X_{T_0}(f) = 0$ であるから、ある波には $\cos$ 波形の波は含まれない。また、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 1$ [Hz] および $f_4 = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi \text{ [rad/秒]}$$

および

$$\omega_4 = 2\pi f_4 = \pm 4\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、これらの振幅は、それぞれ

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

および

$$-\text{Im } X_{T_0}(2) + \text{Im } X_{T_0}(-2) = -1 \cdot 1 + (-1) = -2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \sin 2\pi t - 2 \sin 4\pi t$$

である。

3.3.5 初期位相を持つ波のフーリエ変換

これまで、初期位相 ϕ [rad] が 0 となるように $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波を個別に考えてきましたが、波の世界では、角速度 ω [rad/秒] ごとに、 $\cos$ 波形の波

$$C \cos(\omega t + \phi) \quad (C > 0)$$

の形式で表すことになっていました¹¹。実際、

$$\begin{aligned} C \cos(\omega t + \phi) &= C(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \\ &= (C \cos \phi) \cos \omega t + (-C \sin \phi) \sin \omega t \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \end{aligned}$$

(ただし、 $A = C \cos \phi$ および $B = -C \sin \phi$ とする)

のように、初期位相が 0 の $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波で表すことができます。この節では、これまで個別に扱ってきた $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波を合成して、波の世界の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ で表すことと、そのフーリエ変換について考えましょう。

例として、波 $C \cos 2\pi t$ を 0.125 [秒] 進ませた波、すなわち、初期位相 $\phi = \frac{\pi}{4}$ [rad] の波

$$x(t) = C \cos(2\pi(t + 0.125)) = C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

のフーリエ変換について考察しましょう。なお、

$$C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t \quad \dots \textcircled{1}$$

となることに注意しておきましょう。この波は周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^1 C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t dt - \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t dt \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \end{aligned}$$

¹¹話の都合上、振幅の記号に C を用いました。なお、 $\sin$ 波形の波 $C \sin(\omega t + \phi)$ は、 $C \cos(\omega t + (\phi - \pi/2))$ と書き直せ、 $-C \cos(\omega t + \phi)$ は、 $C \cos(\omega t + (\phi - \pi))$ と書き直せるため、基本的な波は、全て振幅 $C (> 0)$ の $\cos$ 波形の波 $C \cos(\omega t + \phi)$ の形式で表すことができます。

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.11 のようになります。

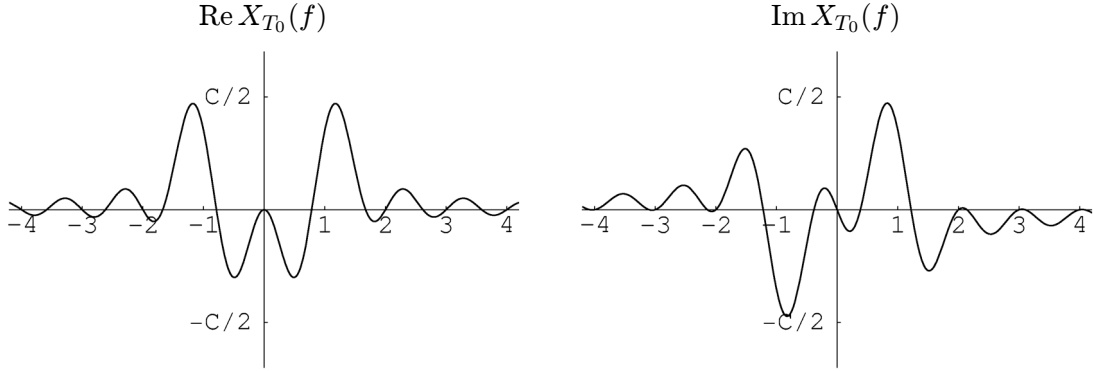


図 3.11: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = C \cos(2\pi t - \pi/4)$)

ここで、波 $x(t)$ の特徴を調べるために、各周波数の $X_{T_0}(f)$ ($\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$) の値を求めましょう。周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] となるので、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分です。グラフより、周波数 $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち、角速度 $\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi$ [rad/秒] の波によって構成されていることがわかります (それ以外の値は 0)。具体的に値を求めると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \right) \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} \\ &\quad - \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(1 - e^{-i2\pi f}) + if(-(-i2\pi)e^{-i2\pi f})}{-2f} \\ &\quad - \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(-i2\pi)e^{-i2\pi f}}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \left(\mp i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} C}{4} (1 \pm i) \quad (\text{符号同順}) \end{aligned}$$

となります。これまで通り、 $\cos$ 波形の波 $\cos 2\pi t$ および $\sin$ 波形の波 $\sin 2\pi t$ に分けて振幅を求めると、

$$\operatorname{Re} X_{T_0}(1) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-1) = \frac{\sqrt{2}C}{4} + \frac{\sqrt{2}C}{4} = \frac{\sqrt{2}C}{2}$$

および

$$-\operatorname{Im} X_{T_0}(1) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-1) = -\left(\frac{\sqrt{2}C}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}C}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}C}{2}$$

となり、元の波

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}C}{2} \cos 2\pi t + \left(-\frac{\sqrt{2}C}{2}\right) \sin 2\pi t$$

が求まります。もちろん、①式より、この波は、

$$x(t) = C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

と書き換えられ、元の波と一致していることがわかります。

波の世界の基本波形

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{ただし、}\omega = 2\pi f \text{ とする})$$

を

$$(\text{与式}) = C \frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} = \left(\frac{C}{2} e^{i\phi}\right) e^{i\omega t} + \left(\frac{C}{2} e^{-i\phi}\right) e^{-i\omega t}$$

と変形し、別の見方をしてみましょう。このとき、これまでの考察から、

$$\frac{C}{2} e^{i\phi} = X_{T_0}(f) \quad \text{および} \quad \frac{C}{2} e^{-i\phi} = X_{T_0}(-f) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかります。そこで、

$$\frac{C}{2} e^{i\phi} = \frac{C}{2} (\cos \phi + i \sin \phi) = X_{T_0}(f)$$

より、まず、初期位相

$$\phi = \arg\left(\frac{C}{2} e^{i\phi}\right) = \arg X_{T_0}(f) \quad (\text{同様に、}\phi = -\arg X_{T_0}(-f))$$

を求めます。求めた初期位相 ϕ [rad] を②式に代入すると振幅

$$C = \frac{2X_{T_0}(f)}{e^{i\phi}} \quad (\text{同様に、} C = \frac{2X_{T_0}(-f)}{e^{-i\phi}})$$

が求められます。さらに、

$$\begin{aligned} C &= \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = \frac{X_{T_0}(f)}{e^{i\phi}} + \frac{X_{T_0}(-f)}{e^{-i\phi}} \quad (\because \textcircled{2} \text{式を代入}) \\ &= \frac{e^{-i\phi} X_{T_0}(f) + e^{i\phi} X_{T_0}(-f)}{e^{i\phi} e^{-i\phi}} = e^{-i\phi} X_{T_0}(f) + e^{i\phi} X_{T_0}(-f) \\ &= \frac{2X_{T_0}(-f)}{C} X_{T_0}(f) + \frac{2X_{T_0}(f)}{C} X_{T_0}(-f) \quad (\because \textcircled{2} \text{式を代入}) \\ &= \frac{4}{C} X_{T_0}(f) X_{T_0}(-f) \end{aligned}$$

より、 $X_{T_0}(f)X_{T_0}(-f) = |X_{T_0}(f)|^2 = |X_{T_0}(-f)|^2$ に注意すると、

$$C^2 = 4X_{T_0}(f)X_{T_0}(-f) = 4|X_{T_0}(f)|^2$$

が成り立つことから、 $C > 0$ にも注意すれば、

$$C = 2|X_{T_0}(f)| = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(f)| = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(-f)|$$

という関係が得られます。以上の考察より、波 $x(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ をフーリエ変換して得られる周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ を使って、直接、

$$\text{振幅 } C = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(-f)|,$$

$$\text{初期位相 } \phi = \arg X_{T_0}(f)$$

を求めることもできます。例を使って確認してみると、それぞれ、

$$|X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = \left| \frac{\sqrt{2}C}{4}(1+i) \right| + \left| \frac{\sqrt{2}C}{4}(1-i) \right| = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg \left(\frac{\sqrt{2}C}{4}(1+i) \right) = \frac{\pi}{4}$$

のように、確かに振幅と初期位相が求められます。

この節の締めくくりとして、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ が複素フーリエ係数 c_n と一致することを述べておきます。この節の最初にも述べたように、波の世界の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ は、

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (A = C \cos \phi, B = -C \sin \phi)$$

と表せます。ここで、上式を次のように変形します。

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t &= A \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + B \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\ &= A \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - iB \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \frac{A - iB}{2} e^{i\omega t} + \frac{A + iB}{2} e^{-i\omega t} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

第 3.3.1 節および第 3.3.2 節で述べたように、 A と B は、それぞれ三角関数によるフーリエ級数の a_n と b_n に対応していることから、③式の前項は複素フーリエ係数の定義そのもので、 c_n に一致していることがわかります。同様に、③式の後項は複素フーリエ係数 c_{-n} に一致していることがわかります。さらに、②式と比較すると、 $X_{T_0}(f) = c_n$ および $X_{T_0}(-f) = c_{-n}$ となることがわかります。すなわち、周波数スペクトル密度を求めるということは、複素フーリエ級数展開を行なって複素フーリエ係数を求めていることに他ならないということです。

例題 1 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 1) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 C (> 0), 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。

解答例 周波数 $f = \pm 1$ [Hz] より、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] である。また、振幅 C および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$C = |X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |1| + |1| = 1 + 1 = 2,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

である。したがって、ある波は、

$$x(t) = 2 \cos \left(2\pi t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

である。

* $|X_{T_0}(1)|$ と $|X_{T_0}(-1)|$ は、両方計算しなくても、一方を計算すれば十分です。

例題 2 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 1$ および ± 3 [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 1) = 3$ および $X_{T_0}(\pm 3) = \mp i2$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 C (> 0), 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。

解答例 周波数 $f = \pm 1$ [Hz] のとき、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] で、振幅 C および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$C = |X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = |3| + |3| = 3 + 3 = 6,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg(3 + i0) = 0$$

である。同様に、周波数 $f' = \pm 3$ [Hz] のとき、角速度 $\omega' = 2\pi f' = \pm 6\pi$ [rad/秒] で、振幅 C' および初期位相 ϕ' [rad] は、それぞれ、

$$C' = |X_{T_0}(3)| + |X_{T_0}(-3)| = |-i2| + |i2| = 2 + 2 = 4,$$

$$\phi' = \arg X_{T_0}(3) = \arg(0 - i2) = -\frac{\pi}{2}$$

である。以上より、ある波は、

$$x(t) = 6 \cos(2\pi t) + 2 \cos \left(6\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

である。

第4章 離散フーリエ変換

4.1 離散フーリエ変換

これまで、私たちは連続関数に対するフーリエ変換およびフーリエ積分 (逆フーリエ変換) について学んできました。この節では、フーリエ変換を離散化した**離散フーリエ変換**について学びましょう。

自然現象 (音声) などを観測して得られる波 (信号値; 観測値) は、通常、電気信号による**連続的**な波として観測機器から出力されます。しかしながら、コンピュータはこの様な連続的な波を直接扱うことができないため、AD 変換器¹を用いてこの波を一定間隔で**サンプリング**し、コンピュータが直接扱うことのできる**離散的**な波 (数値列) に変換して扱います (図 4.2 を参照のこと)。前者を**アナログ** (analog) と呼び、後者を**デジタル** (digital) と呼びます。

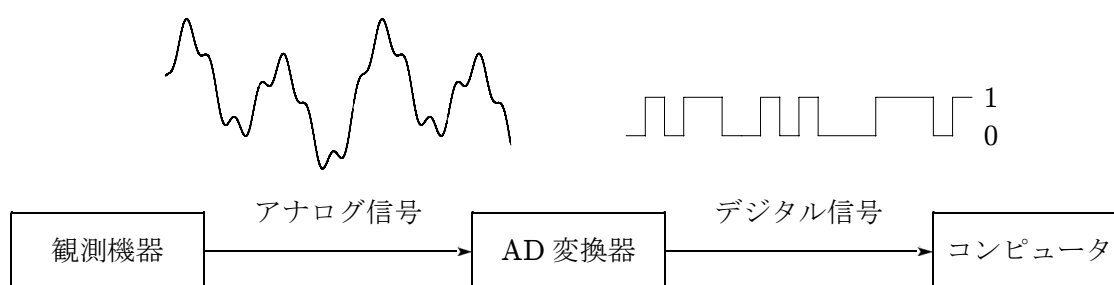


図 4.1: アナログからデジタルへ

¹アナログ信号からデジタル信号に変換する装置を **A-D 変換器** と呼び、逆に、デジタル信号からアナログ信号に変換する装置を **D-A 変換器** と呼びます。

この離散的な波 (数値列) から元の連続的な波の性質を調べるために、これまで学んだフーリエ変換を**離散フーリエ変換**に書き換えましょう。いま、図 4.2 のように観測開始 0 [秒] から観測終了 T_0 [秒] までに観測された連続的な波 $x(t)$ に対して、 Δt [秒] の一定間隔でサンプリングされた N 個の数値列 (離散的な波) を

$$\{ x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), x(3\Delta t), \dots, x((N-2)\Delta t), x((N-1)\Delta t) \}$$

としましょう。

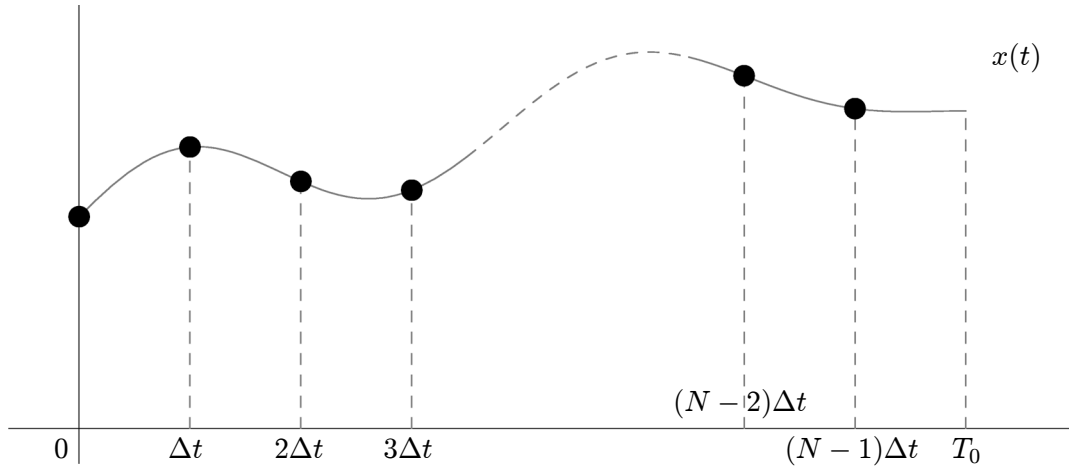


図 4.2: 離散化された波

この離散的な波 (数値列) を直接フーリエ変換することはできないので、区分別積法 (リーマン和) を使って、近似されたフーリエ変換 $X(f)$ を求めます。指数関数 $e^{-i2\pi ft}$ を

$$\varphi(t) = e^{-i2\pi ft}$$

とおくと、近似されたフーリエ変換

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^{T_0} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &\doteq x(0)\varphi(0)\Delta t + x(\Delta t)\varphi(\Delta t)\Delta t + x(2\Delta t)\varphi(2\Delta t)\Delta t + \dots \\ &\quad + x((N-1)\Delta t)\varphi((N-1)\Delta t)\Delta t \quad (\because \text{区分別積法}) \end{aligned}$$

が得られます。さらに、関係式 (Δt は区間 $[0, T_0]$ を N 等分したもの)

$$\Delta t = \frac{T_0 - 0}{N} = \frac{T_0}{N} \text{ [秒]} \quad \dots \textcircled{1}$$

を代入すると、近似されたフーリエ変換

$$X(f) \doteq \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)\varphi(n\Delta t)$$

が得られます。

ここで、連続的な波と離散的な波 (離散化された波) の違いについて比較しておきましょう。そもそも、フーリエ変換は、連続的な波を三角関数の積み重ねによって表そうとしたものですから、いま、連続的な波が、図 4.3 のように三角関数の総和で表されている。例えば、これを 4 等分 ($N = 4$) して離散的な波 (離散化された波) として捉え直してみましょう。

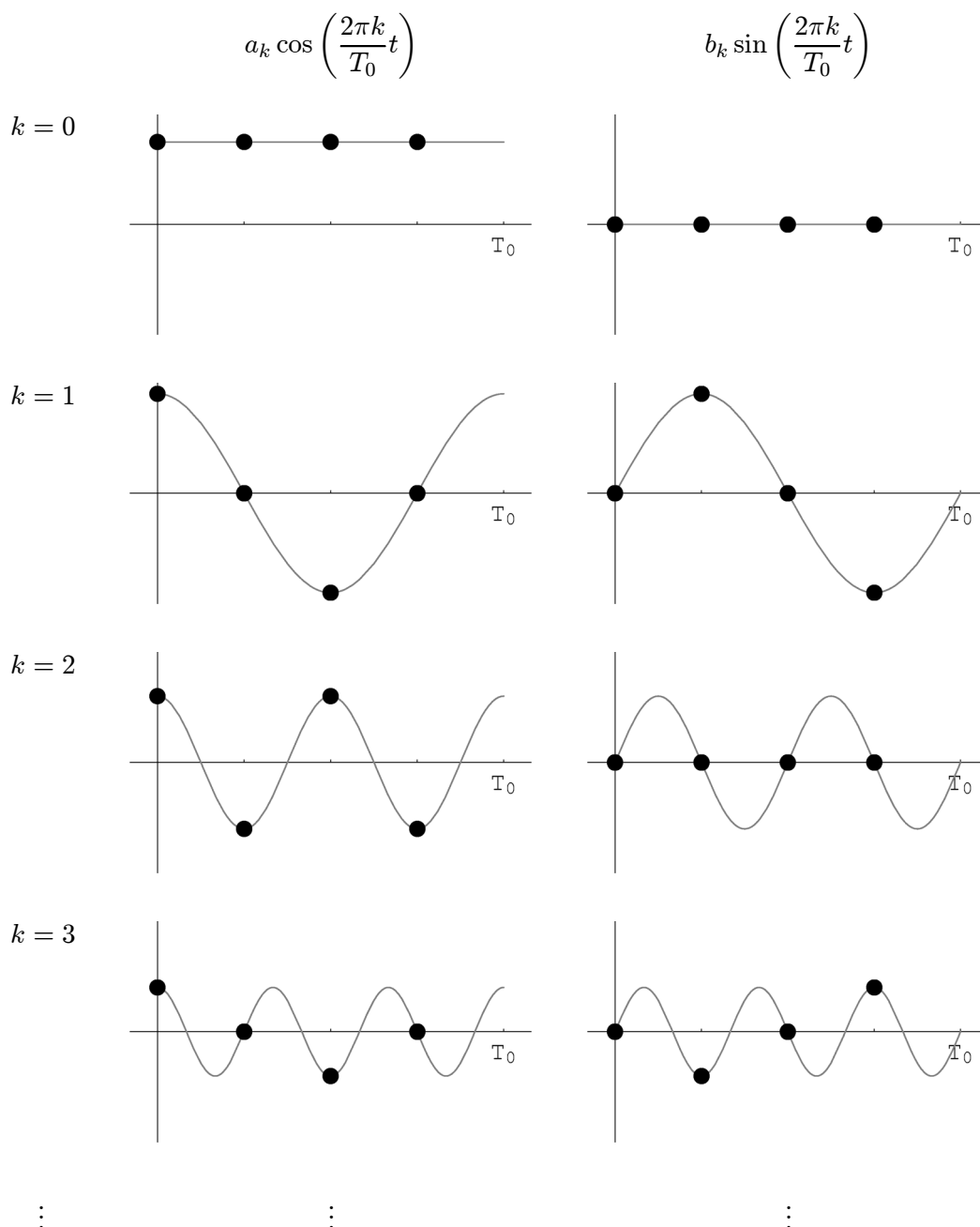


図 4.3: 離散化された波のフーリエ変換

図4.3のグラフを注意深く見てみると、 $k=3$ のグラフは、図4.4のように $k=1$ のグラフとして解釈することができます(本来、赤線の波を青線の波として解釈することができる)。すなわち、離散的な波(離散化された波)では、 $k=3, 4, \dots$ の波は $k=0, 1, 2$ の波に吸収され、 $k=0, 1, 2$ の三角関数のみで表せることを意味しています。逆に、離散的な波(離散化された波)では $k=0, 1, 2$ の三角関数でしか表せないことになります(N に依存します)。

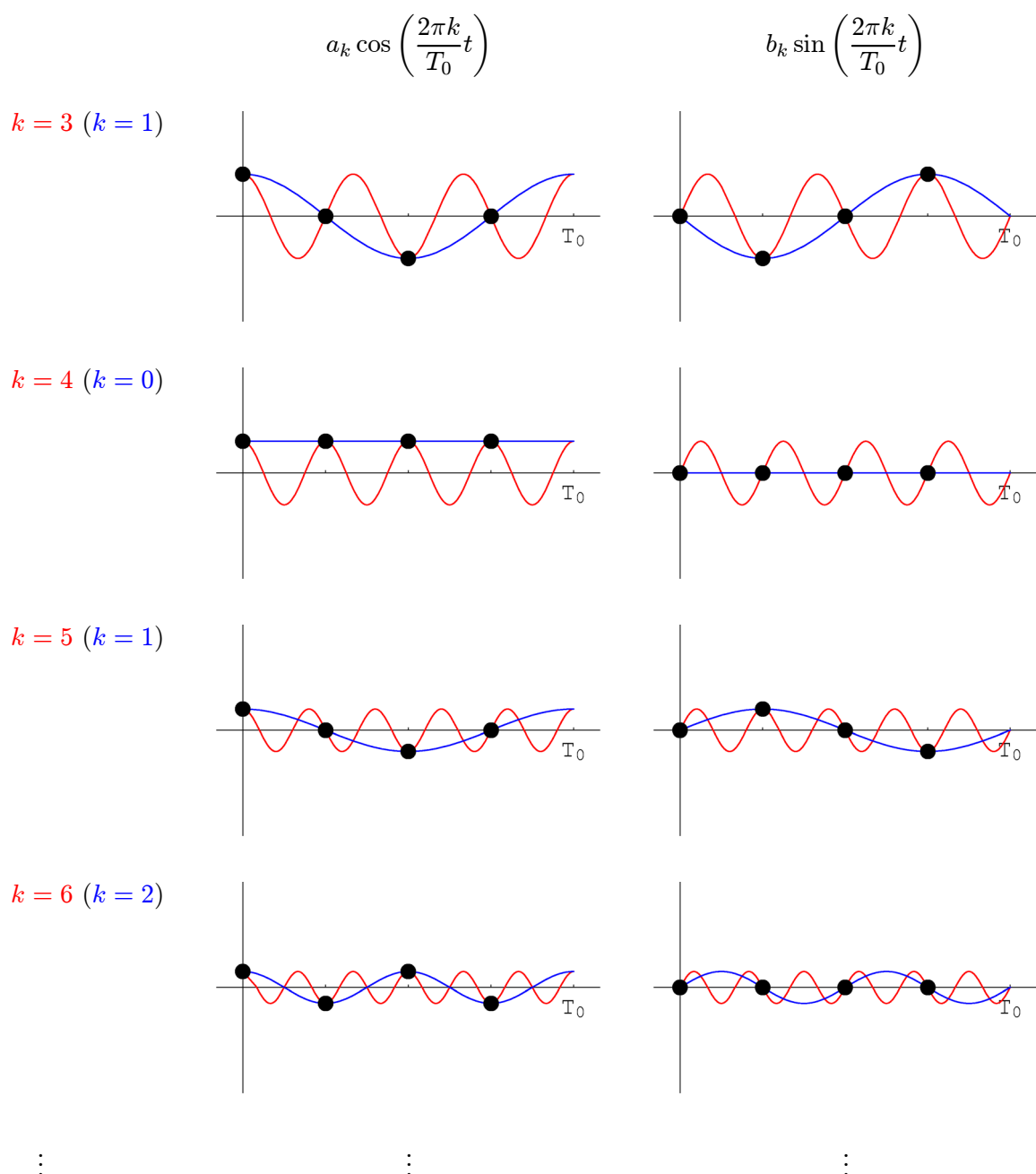


図 4.4: 離散化によって吸収される波

したがって、離散的な波 (離散化された波) に含まれる波の最大周波数 $f_{\max} (= f_s/2)$ [Hz] が決定し、 $2\Delta t$ [秒] で 1 [回転] していることから (例では $k = 2$ の場合)、最大の周波数 $f_{\max}$ は、

$$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} \text{ [Hz]} \quad \left(f_s = \frac{1}{\Delta t} \text{ [Hz]} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

となります。さらに、離散的な波 (離散化された波) の基準となる周波数 Δf [Hz] を

$$\Delta f = \frac{1}{T_0} \text{ [Hz]} \quad \dots \textcircled{3}$$

とおき (3.3.3 節参照)、①式と③式を②式に代入すると、関係式

$$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2T_0} = \frac{N}{2}\Delta f \text{ [Hz]} \quad (f_s = N\Delta f \text{ [Hz]})$$

が得られます。以上より、離散的な波 (離散化された波) の特徴を捉えるには、周波数

$$0, \pm\Delta f, \pm2\Delta f, \pm3\Delta f, \dots, \pm\frac{N}{2}\Delta f \text{ [Hz]}$$

について調べれば十分であることがわかります (第 3 章で述べたように、正の周波数と負の周波数が同時に存在します)。なお、基準となる周波数 Δf [Hz] を **周波数分解能** といい、 Δf より細かな周波数に分解することはできません。また、周波数 $f_s (= 2f_{\max})$ [Hz] を **サンプリング周波数** といい、 $f_s/2 (= f_{\max})$ [Hz] 以上の周波数の波は現れません (周波数領域の f_s [Hz] は、時間領域の T_0 [秒] に対応しています)。

離散的な波のフーリエ変換に話を戻しましょう。前記の考察から、調べる必要のある周波数 $k\Delta f$ [Hz] ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$) の近似されたフーリエ変換 $X(k\Delta f)$ は、

$$\begin{aligned} X(k\Delta f) &= \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \varphi(n\Delta t) \\ &= \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i2\pi(k\Delta f)(n\Delta t)} \end{aligned}$$

となります。①式と③式より、関係式

$$\Delta f \cdot \Delta t = \frac{1}{N} \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つことに注意すれば、近似されたフーリエ変換 $X(k\Delta f)$ は、改めて、

$$X(k\Delta f) = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$$

と書き直すことができます。ここで、

$$W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}} \quad \left(= \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \right)$$

とおくと、点

$$W_N^0, W_N^1, W_N^2, \dots, W_N^{N-1}$$

は、図 4.5 のように単位円を N 等分した円周上の点となり、関係式

$$W_N^N = 1$$

を満たします (W_N は 1 の N 乗根となります)。さらに、関係式

$$W_N^{N-m} = W_N^N \cdot W_N^{-m} = 1 \cdot W_N^{-m} = W_N^{-m}$$

が成り立つことから、

$$W_N^{N-1} = W_N^{-1}, W_N^{N-2} = W_N^{-2}, W_N^{N-3} = W_N^{-3}, \dots$$

となります。

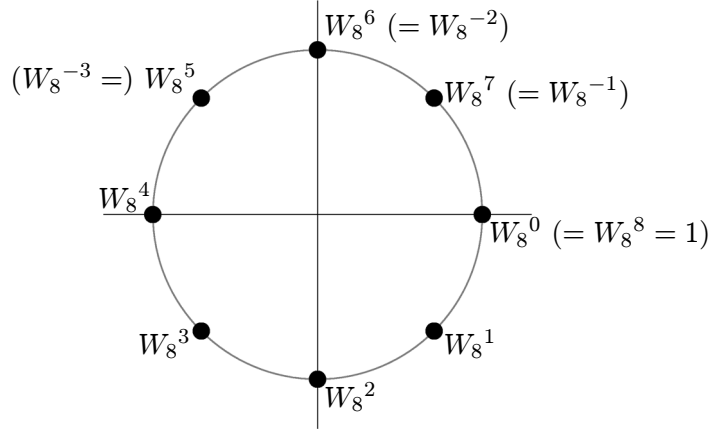


図 4.5: N 等分された単位円周上の点 ($N = 8$ の場合)

そこで、負の周波数 $-k'\Delta f$ [Hz] ($k' = 1, 2, \dots, N/2$) の近似されたフーリエ変換 $X(-k'\Delta f)$ を求めると、関係式

$$\begin{aligned} X(-k'\Delta f) &= \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i\frac{2\pi n(-k')}{N}} = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) W_N^{n(-k')} \\ &= \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) (W_N^{-k'})^n = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) (1 \cdot W_N^{-k'})^n \\ &= \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) (W_N^N \cdot W_N^{-k'})^n = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) (W_N^{N-k'})^n \\ &= \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) W_N^{n(N-k')} = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-i\frac{2\pi n(N-k')}{N}} \\ &= X((N-k')\Delta f) \end{aligned}$$

が得られ、 $k = -k'$ とおくと、負の周波数 $k\Delta f$ [Hz] ($k = -1, -2, \dots, -N/2$) の近似されたフーリエ変換の値 $X(k\Delta f)$ は、

$$\begin{aligned}
 \textcolor{red}{X(-1\Delta f)} &= X((N-1)\Delta f), \\
 \textcolor{red}{X(-2\Delta f)} &= X((N-2)\Delta f), \\
 \textcolor{red}{X(-3\Delta f)} &= X((N-3)\Delta f), \\
 &\vdots \\
 \textcolor{red}{X(-(N/2-2)\Delta f)} &= X((N/2+2)\Delta f), \\
 \textcolor{red}{X(-(N/2-1)\Delta f)} &= X((N/2+1)\Delta f), \\
 \textcolor{blue}{X(-(N/2)\Delta f)} &= X((N/2)\Delta f)
 \end{aligned}$$

となります。したがって、 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ の近似されたフーリエ変換 $X(k\Delta f)$ は、

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 X(0\Delta f), \\
 X(1\Delta f), \\
 X(2\Delta f), \\
 \vdots \\
 X((N/2-1)\Delta f), \\
 X((N/2)\Delta f) &= \textcolor{blue}{X(-(N/2)\Delta f)}, \\
 X((N/2+1)\Delta f) &= \textcolor{red}{X(-(N/2-1)\Delta f)}, \\
 X((N/2+2)\Delta f) &= \textcolor{red}{X(-(N/2-2)\Delta f)}, \\
 \vdots \\
 X((N-3)\Delta f) &= \textcolor{red}{X(-3\Delta f)}, \\
 X((N-2)\Delta f) &= \textcolor{red}{X(-2\Delta f)}, \\
 X((N-1)\Delta f) &= \textcolor{red}{X(-1\Delta f)}
 \end{array} \right.$$

となります。ただし、**赤文字**は、負の周波数の近似されたフーリエ変換に一致することに注意しましょう。また、正の周波数 $(N/2)\Delta f$ の近似されたフーリエ変換は、負の周波数 $\textcolor{blue}{-(N/2)\Delta f}$ の近似されたフーリエ変換として扱うこともできますが、一般的な書籍にならって本テキストでも正の周波数の近似されたフーリエ変換 $X((N/2)\Delta f)$ として扱うことにします。

以上をまとめると、離散化された (近似された) フーリエ変換は、

$$X(k\Delta f) = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) W_N^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

となります。さらに、簡潔に記述するために、記号

$$\left\{ \begin{array}{l}
 X_k = X(k\Delta f), \\
 x_n = x(n\Delta t)
 \end{array} \right. \quad \dots \textcircled{5}$$

を導入すると、離散化された (近似された) フーリエ変換は、

$$X_k = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

となります。この式を**離散フーリエ変換** (Discrete Fourier Transform; **DFT**) と呼びます (信号処理用に最適化されています)。なお、離散フーリエ変換の**離散周波数スペクトル密度** $X_{T_0}(f)$ は、

$$X_{T_0}(f) \doteq X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

となります。

理解を深めるために、例として、 $N = 4$ の場合を見てみましょう。具体的に離散フーリエ変換を書き下してみると、

$$\begin{cases} X_0 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^0 + x_2 W_4^0 + x_3 W_4^0), \\ X_1 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^1 + x_2 W_4^2 + x_3 W_4^3), \\ X_2 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^2 + x_2 W_4^4 + x_3 W_4^6), \\ X_3 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^3 + x_2 W_4^6 + x_3 W_4^9) = \textcolor{red}{X_{-1}} \end{cases}$$

となり、関係式 $W_4^4 = 1 (= W_4^0)$ を用いると、

$$\begin{cases} X_0 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^0 + x_2 W_4^0 + x_3 W_4^0), \\ X_1 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^1 + x_2 W_4^2 + x_3 W_4^3), \\ X_2 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^2 + x_2 W_4^0 + x_3 W_4^2), \\ X_3 = \frac{T_0}{4} (x_0 W_4^0 + x_1 W_4^3 + x_2 W_4^2 + x_3 W_4^1) = \textcolor{red}{X_{-1}} \end{cases}$$

となります。また、行列の形式

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

で表現することもできます。さらに、

$$W_4^0 = 1, \quad W_4^1 = -i, \quad W_4^2 = -1, \quad W_4^3 = i$$

を代入すれば、具体的に離散フーリエ変換

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を求めることができます。もう 1 つの例として、 $N = 8$ の場合を見てみましょう。具体的に離散フーリエ変換を書き下してみると、

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^0 + x_2 W_8^0 + x_3 W_8^0 + x_4 W_8^0 + x_5 W_8^0 + x_6 W_8^0 + x_7 W_8^0), \\ X_1 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^1 + x_2 W_8^2 + x_3 W_8^3 + x_4 W_8^4 + x_5 W_8^5 + x_6 W_8^6 + x_7 W_8^7), \\ X_2 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^2 + x_2 W_8^4 + x_3 W_8^6 + x_4 W_8^8 + x_5 W_8^{10} + x_6 W_8^{12} + x_7 W_8^{14}), \\ X_3 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^3 + x_2 W_8^6 + x_3 W_8^9 + x_4 W_8^{12} + x_5 W_8^{15} + x_6 W_8^{18} + x_7 W_8^{21}), \\ X_4 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^4 + x_2 W_8^8 + x_3 W_8^{12} + x_4 W_8^{16} + x_5 W_8^{20} + x_6 W_8^{24} + x_7 W_8^{28}), \\ X_5 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^5 + x_2 W_8^{10} + x_3 W_8^{15} + x_4 W_8^{20} + x_5 W_8^{25} + x_6 W_8^{30} + x_7 W_8^{35}) = X_{-3}, \\ X_6 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^6 + x_2 W_8^{12} + x_3 W_8^{18} + x_4 W_8^{24} + x_5 W_8^{30} + x_6 W_8^{36} + x_7 W_8^{42}) = X_{-2}, \\ X_7 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^7 + x_2 W_8^{14} + x_3 W_8^{21} + x_4 W_8^{28} + x_5 W_8^{35} + x_6 W_8^{42} + x_7 W_8^{49}) = X_{-1} \end{array} \right.$$

となり、関係式 $W_8^8 = 1 (= W_8^0)$ を用いると、

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^0 + x_2 W_8^0 + x_3 W_8^0 + x_4 W_8^0 + x_5 W_8^0 + x_6 W_8^0 + x_7 W_8^0), \\ X_1 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^1 + x_2 W_8^2 + x_3 W_8^3 + x_4 W_8^4 + x_5 W_8^5 + x_6 W_8^6 + x_7 W_8^7), \\ X_2 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^2 + x_2 W_8^4 + x_3 W_8^6 + x_4 W_8^0 + x_5 W_8^2 + x_6 W_8^4 + x_7 W_8^6), \\ X_3 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^3 + x_2 W_8^6 + x_3 W_8^1 + x_4 W_8^4 + x_5 W_8^7 + x_6 W_8^2 + x_7 W_8^5), \\ X_4 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^4 + x_2 W_8^0 + x_3 W_8^4 + x_4 W_8^0 + x_5 W_8^4 + x_6 W_8^0 + x_7 W_8^4), \\ X_5 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^5 + x_2 W_8^2 + x_3 W_8^7 + x_4 W_8^4 + x_5 W_8^1 + x_6 W_8^6 + x_7 W_8^3) = X_{-3}, \\ X_6 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^6 + x_2 W_8^4 + x_3 W_8^2 + x_4 W_8^0 + x_5 W_8^6 + x_6 W_8^4 + x_7 W_8^2) = X_{-2}, \\ X_7 = \frac{T_0}{8} (x_0 W_8^0 + x_1 W_8^7 + x_2 W_8^6 + x_3 W_8^5 + x_4 W_8^4 + x_5 W_8^3 + x_6 W_8^2 + x_7 W_8^1) = X_{-1} \end{array} \right.$$

となります。また、 $N = 4$ の場合と同様に、行列の形式

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

で表現することもできます。さらに、

$$\begin{aligned} W_8^0 &= 1, & W_8^1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, & W_8^2 &= -i, & W_8^3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ W_8^4 &= -1, & W_8^5 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & W_8^6 &= i, & W_8^7 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

を代入すれば、具体的に離散フーリエ変換

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

を求めることができます。

例として、連続的な波 $x(t) = t$ (区間 $[0, 1]$; $T_0 = 1$ [秒]) を一定間隔 ($N = 8$) でサンプリングして得られた離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ; リスト)

$$\left\{ \frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8} \right\}$$

の離散フーリエ変換について考察しておきましょう (図 4.6 参照)。

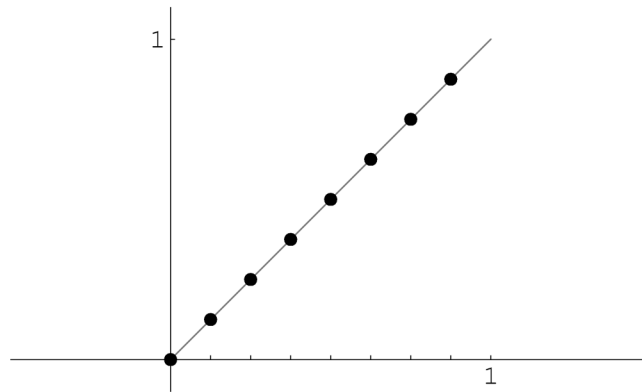


図 4.6: 離散化された波の例 ($x(t) = t$)

行列の形式

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0/8 \\ 1/8 \\ 2/8 \\ 3/8 \\ 4/8 \\ 5/8 \\ 6/8 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

より、離散フーリエ変換 X_k ($k = 0, 1, \dots, 7$) を計算すると、

$$X_0 = \frac{7}{16}, \quad X_1 = \frac{-1 + i(1 + \sqrt{2})}{16}, \quad X_2 = \frac{-1 + i}{16}, \quad X_3 = \frac{-1 + i(-1 + \sqrt{2})}{16}, \quad X_4 = \frac{-1}{16},$$

$$X_5 = X_{-3} = \frac{-1 + i(1 - \sqrt{2})}{16}, \quad X_6 = X_{-2} = \frac{-1 - i}{16}, \quad X_7 = X_{-1} = \frac{-1 + i(-1 - \sqrt{2})}{16}$$

となります。波の特徴を調べるために離散周波数スペクトル密度

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{X_k}{1} = X_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 7)$$

を求め、表にまとめると表 4.1 のようになります。なお、 $T_0 = 1$ より、周波数分解能 (基準となる周波数) Δf が $\Delta f = \frac{1}{T_0} = 1$ [Hz] になることと、**青文字** (X_0, X_2, X_3, X_4) が正の周波数の離散周波数スペクトル密度、および、**赤文字** ($X_5 = X_{-3}, X_6 = X_{-2}, X_7 = X_{-1}$) が負の周波数の離散周波数スペクトル密度となることに注意しましょう。

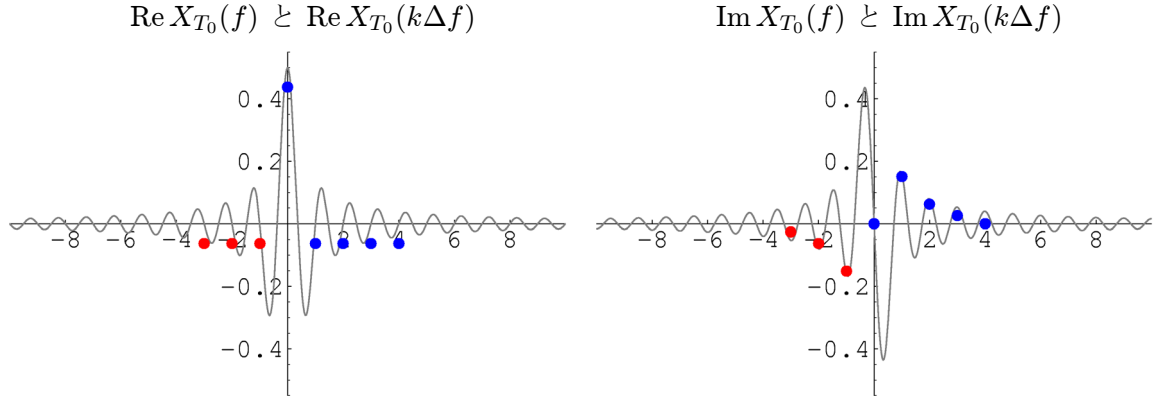
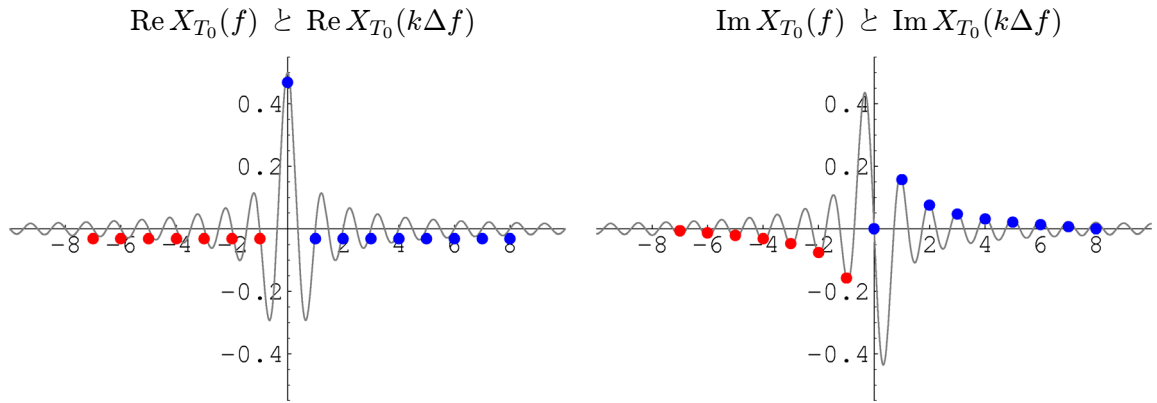
k	5	6	7	0	1	2	3	4
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	$\frac{1-\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1-\sqrt{2}}{16}$	0	$\frac{1+\sqrt{2}}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1+\sqrt{2}}{16}$	0

表 4.1: 離散周波数スペクトル密度

ここで、連続的な波の周波数スペクトル密度 (フーリエ変換)

$$\begin{aligned}
 X_{T_0}(f) &= \frac{Xf}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 t \cdot e^{-i2\pi ft} dt \\
 &= \frac{-1 + e^{-i(2\pi f)} + i(2\pi f)e^{-i(2\pi f)}}{(2\pi f)^2}
 \end{aligned}$$

と離散化された波の離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ を比較するために両方のグラフを重ねて描くと、図 4.7 のようになります。周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフに対して離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ の各点がずれている理由は、この節の前半で述べたように、離散化することで $k = -4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \dots$ の周波数 $k\Delta f$ の離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ が $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, +4$ の周波数 $k\Delta f$ の離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ に吸収されているためです。したがって、このような誤差を少なくするためにはサンプリング数 N を大きくする必要があります。図 4.8 の $N = 16$ の場合、 $N = 4$ の場合に比べて、 $k = -8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \dots$ の周波数 $k\Delta f$ の離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ が $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, +8$ の周波数 $k\Delta f$ の離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ に分散されて吸収されるため誤差が少なくなっていることが確認できます。このように、波を離散フーリエ変換するには十分なサンプリング数が必要であることもわかります。ただし、サンプリング数を増やすとそれだけ多くの計算が必要になることにも注意しなければなりません。実際に離散フーリエ変換で解析や加工を行なう場合は、計算量に注意しながら、対象となる波の特徴を十分に捉えられるだけの最低限のサンプリング数を確保する必要があります。

図 4.7: 周波数スペクトル密度の比較 ($N = 8$)図 4.8: 周波数スペクトル密度の比較 ($N = 16$)

さらに、得られた離散周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(k\Delta f)$ から元の連続的な波 $x(t)$ の性質を調べ、元の連続的な波 $x(t)$ を三角関数で近似した波 (関数) を求めると、 $N = 8$ の場合、

$$\begin{aligned}
 x(t) &\doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0}t\right) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^4 (a_k \cos(2\pi(k\Delta f)t) + b_k \sin(2\pi(k\Delta f)t)) \\
 &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2\pi t + a_2 \cos 4\pi t + a_3 \cos 6\pi t + a_4 \cos 8\pi t \\
 &\quad + b_1 \sin 2\pi t + b_2 \sin 4\pi t + b_3 \sin 6\pi t + b_4 \sin 8\pi t \\
 &= \frac{7}{16} - \frac{1}{8} \cos 2\pi t - \frac{1}{8} \cos 4\pi t - \frac{1}{8} \cos 6\pi t - \frac{1}{16} \cos 8\pi t \\
 &\quad - \frac{1+\sqrt{2}}{8} \sin 2\pi t - \frac{1}{8} \sin 4\pi t - \frac{1-\sqrt{2}}{8} \sin 6\pi t + 0 \cdot \sin 8\pi t
 \end{aligned}$$

となります (第 3.3 節の「波のフーリエ変換」を参照)。なお、各三角関数のスペクトル (振幅) は、

$$\begin{cases} a_k = \operatorname{Re} X_{T_0}(k\Delta f) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-k\Delta f), \\ b_k = -\operatorname{Im} X_{T_0}(k\Delta f) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-k\Delta f) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

を計算することで得られます² (ただし、 $X_{T_0}(-N/2 \cdot \Delta f) = 0$ で計算)。このように、三角関数で近似された波を求めることで、区間 $[0, T_0]$ における元の連続的な波の性質をとらえることができます³。特に、元の連続的な波が三角関数で構成されている場合、元の連続的な波そのものを知ることができます (例題 1, 例題 2, 例題 3)。この例の締めくくりとして、前述で得た三角関数で近似された波と元の連続的な波のグラフを描いて比較しておきます (図 4.9)。

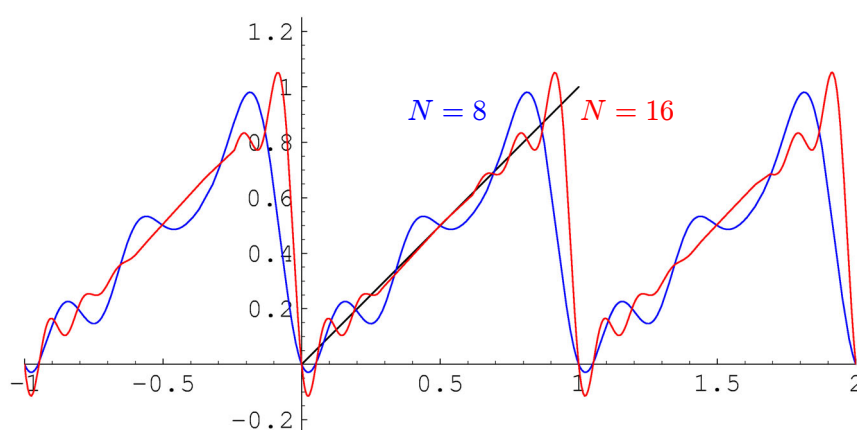


図 4.9: 三角関数で近似された波

²必ず、 $\operatorname{Im} X_{T_0}(0) = 0$ および $\operatorname{Im} X_{T_0}(N/2 \cdot \Delta f) = 0$ となります。また、離散化されたスペクトル (数値列) に現れない離散周波数スペクトル密度の値は 0 となります。なぜそうなるか、それぞれ理由を考えてみてください。

$$\begin{cases} a_0 = \operatorname{Re} X_{T_0}(0 \cdot \Delta f) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-0 \cdot \Delta f) = \operatorname{Re} X_{T_0}(0) + \operatorname{Re} X_{T_0}(0) = 2\operatorname{Re} X_{T_0}(0), \\ a_{N/2} = \operatorname{Re} X_{T_0}(N/2 \cdot \Delta f) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-N/2 \cdot \Delta f) = \operatorname{Re} X_{T_0}(N/2 \cdot \Delta f) + 0 = \operatorname{Re} X_{T_0}(N/2 \cdot \Delta f), \\ b_{N/2} = -\operatorname{Im} X_{T_0}(N/2 \cdot \Delta f) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-N/2 \cdot \Delta f) = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

³三角関数で近似された波は、全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張され、区間 $[0, T_0]$ を積分区間とする周期 T_0 を持つフーリエ級数 (周期関数) となります。

例題 1 ある波 $x(t)$ を 8 [秒] (区間 $[0, 8]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ; リスト)

$$\{ 3, 0, -3, 0 \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。

解答例 $T_0 = 8$ より、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{8} = 0.125$ [Hz] である。さらに、 $N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n W_4^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

となる。 $X_3 = X_{-1}$ となる ことに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-0.125	0	0.125	0.25
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	1.5	0	1.5	0
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm \frac{\pi}{4}$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 0.125$ [Hz]) の $\cos$ 波形の波であることがわかる。なお、 $\cos$ 波形の波の振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(0.125) + \text{Re } X_{T_0}(-0.125) = 1.5 + 1.5 = 3$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$\underline{x(t) = 3 \cos \frac{\pi}{4} t}$$

である。

* $X((N-k)\Delta f) = X((-k)\Delta f)$ より、 $X_3 = X(3\Delta f) = X((4-1)\Delta f) = X((-1)\Delta f) = X_{-1}$ 。

* 表が作成できれば、3.3 節と同様に、波の特徴を調べることができます。

* 答えが正しいか、グラフを描いて確認しましょう。

例題 2 ある波 $x(t)$ を 1 [秒] (区間 $[0, 1]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ; リスト)

$$\{ 1, 1, -1, -1 \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。

解答例 $T_0 = 1$ より、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。さらに、 $N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$\begin{aligned} X_{T_0}(k\Delta f) &= \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n W_4^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - i2 \\ 0 \\ 2 + i2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 - i0.5 \\ 0 \\ 0.5 + i0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-1	0	1	2
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	0.5	0	0.5	0
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	0.5	0	-0.5	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = \pm 1$ [Hz]) の $\cos$ 波形の波および $\sin$ 波形の波を合わせた波であることがわかる。なお、 $\cos$ 波形の波および $\sin$ 波形の波の振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(1) + \text{Re } X_{T_0}(-1) = 0.5 + 0.5 = 1,$$

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos 2\pi t + \sin 2\pi t$$

である。

例題 3 ある波 $x(t)$ を 2 [秒] (区間 $[0, 2]$) にわたって観測し、一定間隔でサンプリングしたところ、離散化された波 (離散的な波; 数値列; データ; リスト)

$$\{ 2, 0, 2, 0 \}$$

を得た。離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) を使って、ある波 $x(t)$ を求めなさい。

解答例 $T_0 = 2$ より、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] である。さらに、 $N = 4$ より、離散周波数スペクトル密度を求めると、

$$X_{T_0}(k\Delta f) = \frac{X_k}{T_0} = \frac{1}{T_0} \left(\frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n W_4^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $X_3 = X_{-1}$ となることに注意すれば、各周波数における離散周波数スペクトル密度は以下の通りである。

k	3	0	1	2
周波数 $k\Delta f$ [Hz]	-0.5	0	0.5	1
$\text{Re } X_{T_0}(k\Delta f)$	0	1	0	1
$\text{Im } X_{T_0}(k\Delta f)$	0	0	0	0

表より、ある波は $x(t)$ は、角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi$ [rad/秒] (周波数 $f = 1$ [Hz]) の cos 波形の波 および 定数項 (直流) 1 を合わせた波であることがわかる。なお、cos 波形の波の振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(1) + \text{Re } X_{T_0}(-1) = 1 + 0 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = 1 + \cos 2\pi t$$

である。

* $k = N/2$ の場合、負の周波数 $-(N/2)\Delta f$ [Hz] の波は 0 なので、正の周波数 $(N/2)\Delta f$ [Hz] の波のみで扱います。ちなみに、離散化された波では、表以外の波は全て 0 です。

* 定数項はフーリエ級数の $\frac{a_0}{2}$ に対応します。

4.2 離散フーリエ積分

この節では、前節の離散フーリエ変換にならって、離散フーリエ積分 (離散逆フーリエ変換) を導きましょう。

周波数分解能を Δf [Hz]、サンプリング周波数を f_s [Hz] とし、周波数領域のスペクトル $X(f)$ の N 個の数値列 (離散化されたスペクトル) を

$$\begin{aligned} & \{ X(0), X(\Delta f), X(2\Delta f), X(3\Delta f), \dots, X((N/2)\Delta f), \\ & \quad X((N/2+1)\Delta f), \dots, X((N-2)\Delta f), X((N-1)\Delta f) \} \\ &= \{ X(0), X(\Delta f), X(2\Delta f), X(3\Delta f), \dots, X((N/2)\Delta f), \\ & \quad X((-N/2+1)\Delta f), \dots, X(-2\Delta f), X(-\Delta f) \} \end{aligned}$$

としましょう (前節の考察より、離散化されたスペクトルの後半の項は負の周波数のスペクトルに対応していることに注意しましょう)。離散フーリエ積分を得るために、積分区間が $[-f_s/2, f_s/2]$ となることに注意し、区分求積法を使って、近似されたフーリエ積分 $x(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} x(t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} X(f) e^{i2\pi ft} df \\ &\doteq \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} X(k\Delta f) e^{i2\pi(k\Delta f)t} \Delta f \quad (\because \text{区分求積法}) \\ &= \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) e^{i2\pi(k\Delta f)t} \quad (\because \text{負の周波数の書き換え}) \end{aligned}$$

となります。さらに、サンプリング間隔を Δt [秒] とおくと、各時間 $n\Delta t$ [秒] ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) における近似されたフーリエ積分の値 $x(n\Delta t)$ は、

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) e^{i2\pi(k\Delta f)(n\Delta t)}$$

となります。なお、前節の③式より、関係式

$$T_0 = \frac{1}{\Delta f} \text{ [秒]}$$

が成り立ち、観測区間 $[0, T_0]$ は $[0, 1/\Delta f]$ となることも注意しておきましょう。続けて、近似されたフーリエ積分の値 $x(n\Delta t)$ に前節の④式を代入すると、

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$$

となります。ここで、簡潔に記述するために、記号

$$W'_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

および前節の⑤式の記号を導入すると、離散化されたフーリエ積分は、

$$x_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

となります。離散フーリエ変換との対応を考慮してさらに書き直すと、離散化されたフーリエ積分は、

$$x_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

となります ($\because$ 前節の③式)。この式を **離散フーリエ積分 (離散逆フーリエ変換)** と呼びます。

理解を深めるために、離散フーリエ変換と同じように、 $N = 4$ の場合の離散フーリエ積分を書き下してみると、

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^0 + X_2 W_4'^0 + X_3 W_4'^0), \\ x_1 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^1 + X_2 W_4'^2 + X_3 W_4'^3), \\ x_2 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^2 + X_2 W_4'^4 + X_3 W_4'^6), \\ x_3 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^3 + X_2 W_4'^6 + X_3 W_4'^9) \end{cases}$$

となり、関係式 $W_4'^4 = 1 (= W_4'^0)$ を用いると、

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^0 + X_2 W_4'^0 + X_3 W_4'^0), \\ x_1 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^1 + X_2 W_4'^2 + X_3 W_4'^3), \\ x_2 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^2 + X_2 W_4'^0 + X_3 W_4'^2), \\ x_3 = \frac{1}{T_0} (X_0 W_4'^0 + X_1 W_4'^3 + X_2 W_4'^2 + X_3 W_4'^1) \end{cases}$$

となります。また、行列の形式

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} W_4'^0 & W_4'^0 & W_4'^0 & W_4'^0 \\ W_4'^0 & W_4'^1 & W_4'^2 & W_4'^3 \\ W_4'^0 & W_4'^2 & W_4'^0 & W_4'^2 \\ W_4'^0 & W_4'^3 & W_4'^2 & W_4'^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

で表現することもできます。さらに、

$$W_4'^0 = 1, \quad W_4'^1 = i, \quad W_4'^2 = -1, \quad W_4'^3 = -i$$

を代入すれば、具体的に離散フーリエ積分

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

を求めることができます。

ここで、離散フーリエ変換と離散フーリエ積分の関係について述べておきます。そもそも、離散フーリエ変換は離散化された波を離散化されたスペクトルに変換し、離散フーリエ積分は離散化されたスペクトルを離散化された波に変換します。すなわち、離散化された波を離散フーリエ変換し、さらに離散フーリエ積分すると、元の離散化された波に戻ります。したがって、離散フーリエ変換を表す行列を A_N とし、離散フーリエ積分を表す行列を B_N とすると、

$$A_N B_N = I_N \quad (I_N \text{ は } N \times N \text{ 単位行列})$$

の関係を満たします。 $N = 4$ の場合、

$$A_4 = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}, \quad B_4 = \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

より、

$$A_4 B_4 = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。また、行列 A_N および B_N は、それぞれ、行列自身の転置行列となっていて、

$$A_N^T = A_N \quad \text{および} \quad B_N^T = B_N$$

が成り立ちます。さらに、ノルム (スカラー) を調整し、

$$A'_N = \frac{\sqrt{N}}{T_0} A_N \quad \text{および} \quad B'_N = \frac{T_0}{\sqrt{N}} B_N$$

とおくと、行列 A'_N と行列 B'_N は互いに共役転置⁴の関係にあり、

$$A'_N{}^* = B'_N \quad (B'_N{}^* = A'_N)$$

が成り立ちます。 $N = 4$ の場合、

$$A'_4 = \frac{\sqrt{4}}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix},$$

$$B'_4 = \frac{T_0}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{T_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

⁴行列 C の共役転置行列 C^* は、行列 C の各成分の複素共役をとり、さらに転置をほどこした行列です (行列 C を転置し、さらに各成分の複素共役をとってもよい)。i.e. $C^* = [\overline{c_{ij}}]^T = [\overline{c_{ji}}]$ 。

より、

$$\begin{aligned} A_4'^* &= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{-i} & \overline{-1} & \overline{i} \\ \overline{1} & \overline{-1} & \overline{1} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{i} & \overline{-1} & \overline{-i} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = B_4' \end{aligned}$$

となります。このような、

$$A_N' B_N' = I_N \quad \text{かつ} \quad A_N'^* = B_N' \quad (B_N'^* = A_N')$$

を満たす行列は、数学的にも非常に重要です (特に線形写像として)。また、応用面においても、システム解析やシステム設計の分野でこのような行列が様々な形で利用されています⁵。

4.3 高速フーリエ変換

第4.1節では、コンピュータを使って離散的な波 (デジタルデータ) を処理 (フーリエ変換) できるように、連続的な波のフーリエ変換から離散的な波のフーリエ変換である離散フーリエ変換

$$X_k = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

を導きました。この離散フーリエ変換の数式をそのまま計算すると、複素数の乗算の回数だけでも N^2 回の演算が必要となります。言い換えれば、離散フーリエ変換の計算量 (Order) は $O(N^2)$ となります。そのため、 N が大きくなるにしたがって計算量が爆発的に増加し、コンピュータを用いても、 N がある程度大きくなると計算不可能となってしまいます。この計算量の問題を解決した離散フーリエ変換のアルゴリズム (algorithm) に、西暦 1965 年にジェイムズ・クーリー (J. W. Cooley) とジョン・テューキー (J. W. Tukey) によって発見された、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform; **FFT**) と呼ばれる方法があります⁶。この方法は、離散フーリエ変換 (DFT) の周期性および対称性に着目して計算量を減らしたアルゴリズムで、 $N = 2^l$ (l は自然数) のときオーダーは $O(N \log_2 N)$ となります⁷。また、この方法は、再帰的に分割統治法 (divide and conquer) を繰り返すアルゴリズムとなっており、演算構造を図式化すると蝶のはねのようになることから、**バタフライ演算**とも呼ばれます。

⁵工学系では、行列を計算したつもりが、実は離散フーリエ変換を計算していたということがよくあります。

⁶Cooley-Tukey アルゴリズムとも呼ばれ、後に高速フーリエ変換と呼ばれるようになりました。一般に、高速フーリエ変換といえば、Cooley-Tukey アルゴリズムによる離散フーリエ変換を指します。また、西暦 1805 年ごろにガウス (Gauss) が同様のアルゴリズムを独立に発見していたといわれています。

⁷ $N \neq 2^l$ の場合についても、高速フーリエ変換を改良したアルゴリズムが開発されています。また、精度は落ちますが、データ数が $N = 2^l$ となるようにデータに 0 を補充してから、高速フーリエ変換することもできます。

例として、 $N = 4 = 2^2$ ($l = 2$) の場合の高速フーリエ変換について見て行きましょう。まず、 W_4^n の対称性に着目して図 4.10 のように x_0 と x_2 および x_1 と x_3 をそれぞれペアにします。

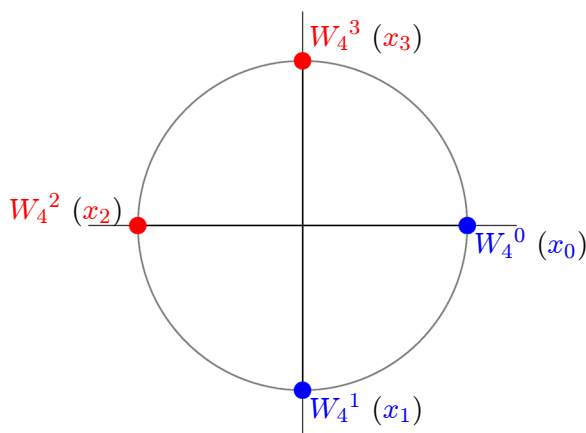


図 4.10: 4 等分された単位円周上の点

言い換えると、以下のように行列の形式で表した離散フーリエ変換の第 2 列と第 3 列を入れ替えます。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^1 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^0 & W_4^2 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^3 & W_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

次に、以下のように分割し、小行列で表します (分割)。

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \frac{T_0}{4} \left(\begin{array}{cc|cc} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^1 & W_4^3 \\ \hline W_4^0 & W_4^0 & W_4^2 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^3 & W_4^1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{T_0}{4} \left(\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^1 & W_4^3 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{T_0}{4} \left(\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{T_0}{4} \left(\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_4^2 & W_4^2 \\ W_4^3 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

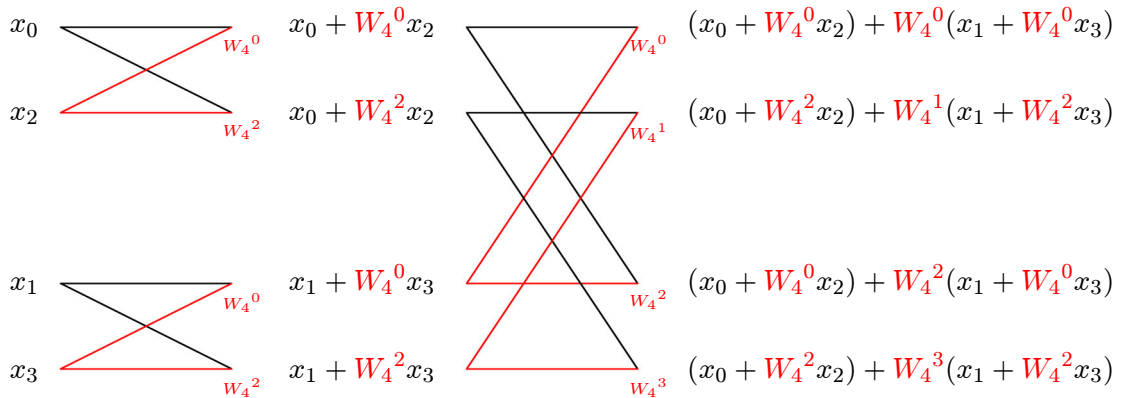
このとき、各行の第2項をそれぞれ W_4^0 と W_4^2 でくくると同じ小行列が現れることがわかります。

$$(\text{与式}) = \frac{T_0}{4} \left(\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \end{bmatrix} + W_4^0 \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \end{bmatrix} + W_4^2 \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^1 & W_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$$

さらに、演算順序を変えないで小行列を展開します (統治)。

$$(\text{与式}) = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} (W_4^0 x_0 + W_4^0 x_2) + W_4^0 (W_4^0 x_1 + W_4^0 x_3) \\ (W_4^0 x_0 + W_4^2 x_2) + W_4^0 (W_4^1 x_1 + W_4^3 x_3) \\ (W_4^0 x_0 + W_4^0 x_2) + W_4^2 (W_4^0 x_1 + W_4^0 x_3) \\ (W_4^0 x_0 + W_4^2 x_2) + W_4^2 (W_4^1 x_1 + W_4^3 x_3) \end{pmatrix} \\ = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} (W_4^0 x_0 + W_4^0 x_2) + W_4^0 (W_4^0 x_1 + W_4^0 x_3) \\ (W_4^0 x_0 + W_4^2 x_2) + W_4^1 (W_4^0 x_1 + W_4^2 x_3) \\ (W_4^0 x_0 + W_4^0 x_2) + W_4^2 (W_4^0 x_1 + W_4^0 x_3) \\ (W_4^0 x_0 + W_4^2 x_2) + W_4^3 (W_4^0 x_1 + W_4^2 x_3) \end{pmatrix} \\ = \frac{T_0}{4} \begin{pmatrix} (x_0 + W_4^0 x_2) + W_4^0 (x_1 + W_4^0 x_3) \\ (x_0 + W_4^2 x_2) + W_4^1 (x_1 + W_4^2 x_3) \\ (x_0 + W_4^0 x_2) + W_4^2 (x_1 + W_4^0 x_3) \\ (x_0 + W_4^2 x_2) + W_4^3 (x_1 + W_4^2 x_3) \end{pmatrix} \quad (\because W_4^0 = 1)$$

このようにして得られた数式が高速フーリエ変換です。なお、同じ数式が繰り返し現れるため、全体の乗算の回数 (計算量) を $4^2 (= 16)$ から $4 \log_2 4 (= 8)$ に減らすことができます。また、この数式の演算構造を図式化すると図 4.11 のようになります。



* 黒線はそのまま加算し、赤線は線の下に W_4^n を掛けてから加算します。

図 4.11: バタフライ演算 ($N=4$)

理解を深めるために、 $N = 8 = 2^3$ ($l = 3$) の場合の高速フーリエ変換についても見ておきましょう。まず、 $N = 4$ の場合と同様に、 x_0 と x_4 , x_2 と x_6 , x_1 と x_5 , x_3 と x_7 をそれぞれペアにします (図 4.12 参照)。

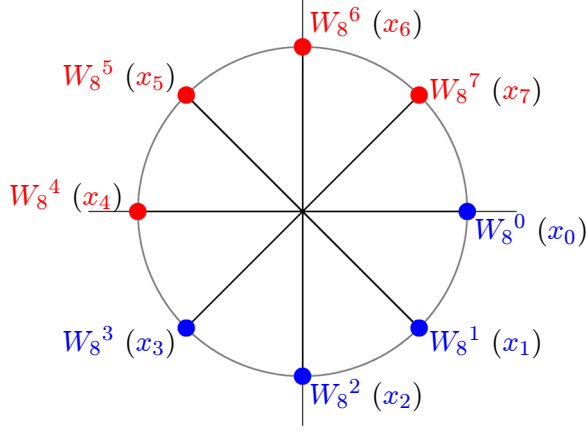


図 4.12: 8 等分された単位円周上の点

すなわち、行列の形式で表した離散フーリエ変換の列を交換して以下のように変形します。

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} &= \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^5 & W_8^3 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^2 & W_8^6 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^7 & W_8^1 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^1 & W_8^7 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^6 & W_8^2 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^3 & W_8^5 & W_8^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

次に、以下のように分割し、小行列で表します (分割)。

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \frac{T_0}{8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^5 & W_8^3 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^2 & W_8^6 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^7 & W_8^1 & W_8^5 \\ \hline W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^1 & W_8^7 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^6 & W_8^2 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^3 & W_8^5 & W_8^1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ \hline x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

[illegible]

$$(\text{与式}) = \frac{T_0}{8} \left(\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix} + W_8^0 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^2 & W_8^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix} + W_8^4 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^2 & W_8^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix} + W_8^0 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^2 & W_8^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix} + W_8^4 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^2 & W_8^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} \end{pmatrix} + W_8^0 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^1 & W_8^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} + W_8^0 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^3 & W_8^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^1 & W_8^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} + W_8^4 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^2 & W_8^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^1 & W_8^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} + W_8^0 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^3 & W_8^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^1 & W_8^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} + W_8^4 \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^2 & W_8^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_7 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right)$$

さらに、演算順序を変えないで小行列を展開します (統治)。

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^0 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^0 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^0 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^0 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^2 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^4 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^2 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^4 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^4 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^0 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^4 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^0 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^6 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^4 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^6 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^4 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^0 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^0 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^0 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^0 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^2 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^4 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^2 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^4 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^4 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^0 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^4 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^0 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^6 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^4 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^6 ((W_8^1 x_1 + W_8^5 x_5) + W_8^4 (W_8^3 x_3 + W_8^7 x_7)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^0 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^0 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^1 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^0 (W_8^2 x_3 + W_8^6 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^2 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^4 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^3 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^4 (W_8^2 x_3 + W_8^6 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^4 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^0 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^5 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^0 (W_8^2 x_3 + W_8^6 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^6 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^4 (W_8^2 x_2 + W_8^6 x_6)) + W_8^7 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^4 (W_8^2 x_3 + W_8^6 x_7)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^0 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^2 (W_8^0 x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^1 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^2 (W_8^0 x_3 + W_8^4 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^2 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^6 (W_8^0 x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^3 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^6 (W_8^0 x_3 + W_8^4 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^4 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^2 (W_8^0 x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^5 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^2 (W_8^0 x_3 + W_8^4 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (W_8^0 x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^6 ((W_8^0 x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (W_8^0 x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((W_8^0 x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^6 (W_8^0 x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^7 ((W_8^0 x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^6 (W_8^0 x_3 + W_8^4 x_7)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上より、 $W_8^0 = 1$ に注意すれば、 $N = 8 = 2^3$ ($l = 3$) の場合の高速フーリエ変換

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{8} \begin{pmatrix} ((x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^0 ((x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^2 (x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^1 ((x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^2 (x_3 + W_8^4 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^2 ((x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^6 (x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^3 ((x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^6 (x_3 + W_8^4 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^0 (x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^4 ((x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^0 (x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^2 (x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^5 ((x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^2 (x_3 + W_8^4 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^0 x_4) + W_8^4 (x_2 + W_8^0 x_6)) + W_8^6 ((x_1 + W_8^0 x_5) + W_8^4 (x_3 + W_8^0 x_7)) \\ ((x_0 + W_8^4 x_4) + W_8^6 (x_2 + W_8^4 x_6)) + W_8^7 ((x_1 + W_8^4 x_5) + W_8^6 (x_3 + W_8^4 x_7)) \end{pmatrix}$$

が得られます。なお、 $N = 4$ の場合と同様に、同じ数式が繰り返し現れるため、全体の乗算の回数 (計算量) を $8^2 (= 64)$ から $8 \log_2 8 (= 24)$ に減らすことができます。また、この数式の演算構

造を図式化すると図 4.11 のようなバタフライ演算を描くことができますが、これは読者への宿題としておきます⁸。

この章の最後に、離散フーリエ積分と離散フーリエ変換についてまとめておくと、下表のようになります。

	離散フーリエ積分	離散フーリエ変換
数値列	$x_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk}$ $(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$	$X_k = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

表 4.2: 離散フーリエ積分 (離散逆フーリエ変換) と離散フーリエ変換

【注意】 一般的な離散フーリエ変換の定義は、本テキストの周波数スペクトル密度の定義と一致し、 T_0 が消えてすっきりした数式となっています。ただし、 T_0 は Δf を決める重要な値であることに注意してください。

$$\begin{cases}
 x_n = \frac{1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk}, \\
 X_k = \frac{T_0}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}
 \end{cases}
 \quad (\text{本テキストの定義}),$$

$$\begin{cases}
 x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk}, \\
 X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}
 \end{cases}
 \quad (\text{一般的な定義}),$$

$$\begin{cases}
 x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N'^{nk}, \\
 X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}
 \end{cases}
 \quad (\text{数式処理ソフト Mathematica のデフォルトの定義})$$

⁸一般的な、 $N = 2^l$ (l は自然数) の高速フーリエ変換の数式を求めてみましょう。

第5章 音声を加工してみよう!

5.1 Mathematica の離散フーリエ変換

この章では、コンピュータを使って離散フーリエ変換および離散フーリエ積分を計算し、波の特徴を捉えたり、波 (音; 音声; 音波) の加工を行ってみましょう。なお、離散フーリエ変換および離散フーリエ積分の計算には、ウルフラム・リサーチ社 (Wolfram Research, Inc.) の開発した数式処理ソフト Mathematica を使用します (以後、単に Mathematica と記載します)。

Mathematica の

離散フーリエ変換 `Fourier[ リスト  $u_r$  ]` (= リスト v_s)

および

離散フーリエ積分 `InverseFourier[ リスト  $v_s$  ]` (= リスト u_r)

のデフォルトの定義では、(時間領域の) 長さ n のリスト (配列) u_r に対して離散フーリエ変換

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

を計算し、(周波数領域の) 長さ n のリスト (配列) v_s に対して離散フーリエ積分

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n v_s e^{-2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

を計算します¹。なお、離散フーリエ変換および離散フーリエ積分の定義では添え字は 0 から始まりますが、Mathematica のリスト (配列) の添え字が 1 から始まることに注意しましょう (指数関数のべきを $\pm 2\pi i(r-1)(s-1)/n$ として調節してあります)。

¹離散フーリエ変換と記述されていますが、実際には、高速フーリエ変換のアルゴリズムを使って計算します。

このままでは本テキストの定義とも異なり使いづらいので、オプションを設定して信号処理に適した離散フーリエ変換および離散フーリエ積分の数式に設定しましょう。Mathematica のオプション付きの離散フーリエ変換 v_s および離散フーリエ積分 u_r の計算式は、それぞれ

$$v_s = \frac{1}{n^{(1-a)/2}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi i b(r-1)(s-1)/n} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

$$u_r = \frac{1}{n^{(1+a)/2}} \sum_{s=1}^n v_s e^{-2\pi i b(r-1)(s-1)/n} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

となっており、オプション

$$\begin{aligned} (a, b) &= (0, 1) && \text{デフォルト,} \\ (a, b) &= (-1, 1) && \text{データ解析,} \\ (a, b) &= (1, -1) && \text{信号処理,} \end{aligned}$$

を設定することで、各用途に適した計算式となります。本テキストの定義に合ったオプションは、

$$(a, b) = (-1, -1)$$

で、離散フーリエ変換 v_s および離散フーリエ積分 u_r は、それぞれ

$$v_s = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n u_r e^{-2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

$$u_r = \sum_{s=1}^n v_s e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

となります。この章では、改めて、この一対の式を離散フーリエ変換および離散フーリエ積分と定義し直すことにしましょう。なお、上記の離散フーリエ変換 v_s の式は、第4章では離散周波数スペクトル密度と呼ばれていた式ですが、この章では、**離散フーリエ変換と離散周波数スペクトル密度を同じ意味として扱うことにします**。また、新しい式では、 T_0 を含みませんが、周波数分解能 $\Delta f = \frac{1}{T_0}$ [Hz] を決める重要な数値であることに注意しましょう。Mathematica では、

離散フーリエ変換 `Fourier[ リスト  $u_r$ , FourierParameters -> {-1, -1} ]`

および

離散フーリエ積分 `InverseFourier[ リスト  $v_s$ , FourierParameters -> {-1, -1} ]`

のように入力します。

具体的な計算例については、ホームページにリンクされている「教材: Mathematica プログラム 11 (Mathematica ノートブック)」をご覧ください。

* `Chop[]` 命令は、ゼロに近い近似実数を厳密な整数 0 に置き換えます。

5.2 サンプリング

離散フーリエ変換を用いた自然現象などの波の解析や加工にあたって、サンプリングは非常に重要な要素となります。扱う波の特徴や性質をよく知っている必要があります。本テキストでは、最も身近な波として、音 (音声; 音波) と呼ばれる波について扱って行きます。

人間が耳から聞くことのできる音の周波数は、20 [Hz] から 20k [Hz] と言われています²。なお、低い周波数の音ほど低い音に聞こえ、高い周波数ほど高い音に聞こえます。人間が耳から聞くことのできる音の周波数を全てカバーしようとする、サンプリング間隔は、

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2 \times f_{\max}} = \frac{1}{2 \times 20000} = \frac{1}{40000} \text{ [秒]}$$

となり、実に、1秒あたり 40,000 回ものサンプリングが必要となってきます。現在の主なオーディオメディアのサンプリング数を挙げてみると、

電話 :	11k 回 ([Hz]),
AM ラジオ :	22k 回 ([Hz]),
FM ラジオ (テレビ) :	32k 回 ([Hz]),
CD :	44k 回 ([Hz]),
DVD :	48k 回 ([Hz])

となっており、デジタルオーディオと呼ばれている CD や DVD は、人間が耳から聞くことのできる音の周波数を全てカバーしていることがわかります³。特に、DVD のサンプリング周波数は、

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{1}{48000}} = 48,000 \text{ [Hz]}$$

となり、人間が耳から聞くことのできる音の周波数を超えていることがわかります。このようなサンプリング周波数が採用されているのは、人間は耳から聞くだけでなく皮膚などを通して音を感じ取っていることが、最近の研究でわかってきたためです (イヌやネコには聞こえていることでしょう)。

逆に、人間の口から発せられる音 (声) の周波数は、標準的な人で 300 [Hz] から 4k [Hz] といわれています。主な、声や音の周波数を挙げておくと、

²20 [Hz] から 20k [Hz] というのは、非常に耳の良い人の値で、一般的な人は 20 [Hz] から 15k [Hz] 程度です。ちなみに、他の動物では、

イヌ :	50k [Hz],
ネコ :	60k [Hz],
コウモリ :	120k [Hz],
イルカ :	150k [Hz]

とされています。

³固定電話で電話越しに声を聞くと少し違った声に聞こえるのは、伝送可能な周波数帯域が 300~3,400 [Hz] となっているためです。電話機が登場した当時は、話の内容が伝わればよいという考えで、音質までは余り考慮されていませんでした。

- 20.0 [Hz] : 人間には聴こえない周波数,
- 27.5 [Hz] : ピアノの1番低い鍵盤の周波数,
- 440 [Hz] : 時報の「び」の周波数,
- 880 [Hz] : 時報の「ぼーん」の周波数,
- 1,000 [Hz] : 男性の声の主成分の周波数,
- 2,000 [Hz] : 女性の声の主成分の周波数,
- 4,096 [Hz] : ピアノの1番高い鍵盤の周波数

となっています。

以上のことを考慮しながら、音のサンプリング、離散フーリエ変換、離散フーリエ積分を行なっていくことにしましょう。まず、音(声)のサンプリングには、Windowsに付属している図5.1のソフトウェア「サウンドレコーダー」を使用します。「スタート」メニューから、「プログラム」→「アクセサリ」→「エンターテイメント」→「サウンドレコーダー」の順に選択し、サウンドレコーダーを起動してください(コンピュータのマイク端子にマイクを差し込んでおくのを忘れないでください)。使い方は簡単なので詳細な説明は省きますが、2つほど注意点を挙げておきます。

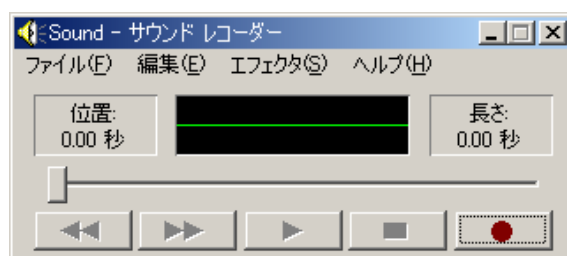


図 5.1: サウンドレコーダー

1つは、マイクから録音できない場合です。マイクから録音できるようにするには、以下の設定作業を行なってください。サウンドレコーダーのメニューから、「編集」→「オーディオのプロパティ」の順に選択し、図5.2の「オーディオのプロパティ」ウインドウを開きます。

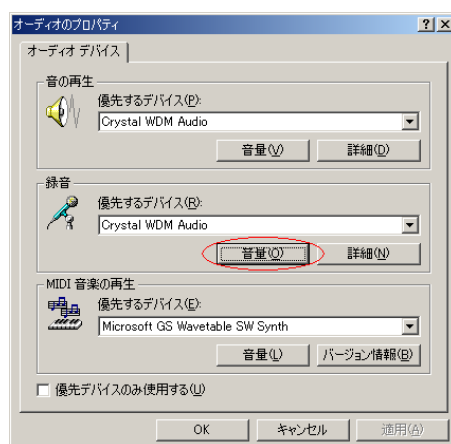


図 5.2: オーディオのプロパティ

さらに、「録音」の項目の「音量」をクリックし、図 5.3 の「録音コントロール」ウインドウを開きます。「マイク」の「選択」にチェックが入っているか確認し、入っていないければ「マイク」の「選択」をチェックし、入力装置をマイクに設定します。



図 5.3: 録音コントロール

もう 1 つは、録音した音をファイルに保存する場合です。「ファイル」メニューから「名前を付けて保存」を選択すると、図 5.4 の「名前を付けて保存」ウインドウが開きます。

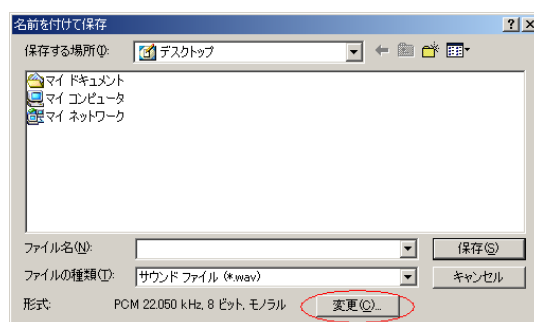


図 5.4: 名前を付けて保存

さらに、「形式」の項目の「変更」ボタンをクリックし、図 5.5 の「サウンドの選択」ウインドウを開きます。

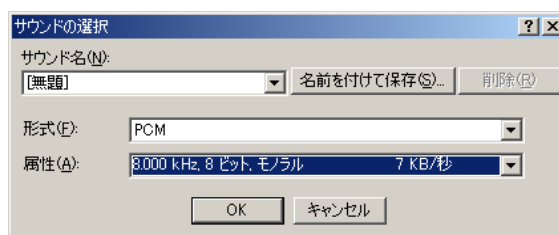


図 5.5: サウンドの選択

このウインドウからサンプリング周波数を選ぶことができます。「形式」には Mathematica で読み込み可能な「PCM」⁴を選択してください。また、「属性」には「8.000kHz, 8bit, モノラル」⁵を選択してください (この選択を本テキストのデフォルトとします)。設定が終わったら、「OK」ボタンをクリックし、図 5.4 の「名前を付けて保存」ウインドウに戻り、「保存する場所」と「ファイル名」を適切に設定し、「保存」ボタンをクリックしてファイルに保存してください (ファイルの保存形式は「Microsoft wave 形式」で、拡張子は「.wav」です)。

サウンドレコーダーで離散化された波の作成を終えたら、Mathematica を使って離散フーリエ変換や離散フーリエ積分を行なってみましょう。まず、離散化された波 (保存したファイル) を Mathematica に読み込みましょう。ファイルを読み込むには、`SetDirectory[]` 命令を使ってファイルのあるディレクトリに変更し、`Import[]` 命令を使って離散的な数値列を配列として読み込みます (詳細については、ホームページにリンクされている「教材: Mathematica プログラム 11 (Mathematica ノートブック)」を参照のこと)。

離散化された波をグラフで見るには、`ListPlot[]` 命令を使います。例えば、

```
ListPlot[x, PlotRange -> {Automatic, {-1, 1}}]
```

を実行すると図 5.6 のグラフが描かれます。ただし、変数 x には時間領域の離散化された波が配列形式で記憶されているものとします。

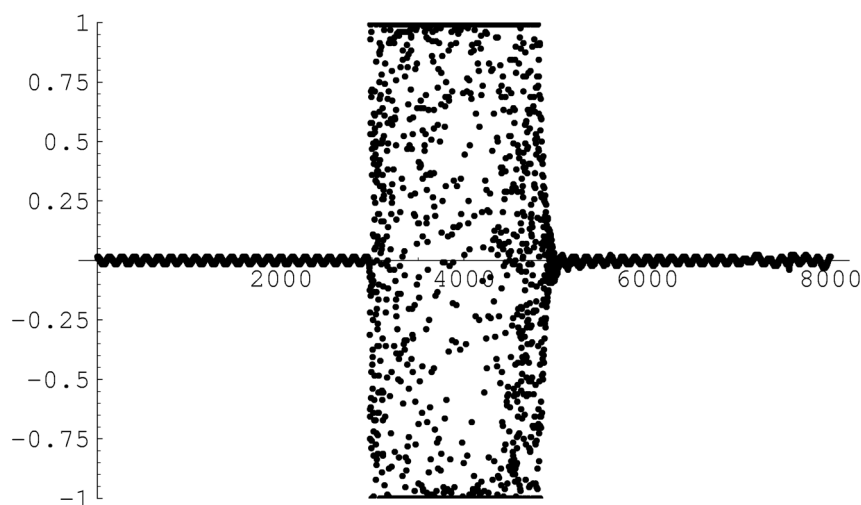


図 5.6: 離散化された波 (x_n)

⁴アナログ信号の波形を時系列に区切り (標本化といいます)、その区切った波形の高さを 2 値 (2 進数) に変換して (量子化して)、その信号を表現する変調方式です。

⁵サンプリング周波数には、8k, 11k, 12k, 16k, 22k, 24k, 32k, 44k [Hz] のいずれかが選択できます (この節の最初の表を参照のこと)。量子化ビット数には、8 ビットと 16 ビットのいずれかが選択できます (8 ビットでは $256 = 2^8$ 段階で、16 ビットでは $65536 = 2^{16}$ 段階で、量子化されます)。モノラルとステレオの違いは、モノラルは 1 チャンネル、ステレオは 2 チャンネルとなります (時系列に対して、扱える独立した波の個数をチャンネル (ch) といいます)。

離散化された波を音として聞くには、`ListPlay[]` 命令を使います。例えば、

```
ListPlay[x, SampleRate -> 8000]
```

を実行すると図 5.7 のグラフが描かれ、音 (離散化された波) が再生されます。

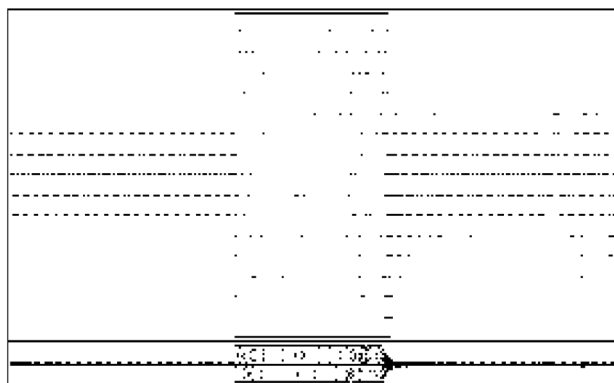


図 5.7: 離散化された波の音の再生

離散フーリエ変換を行なうには、`Fourier[]` 命令を使います。例えば、

```
lx = Chop[Fourier[x, FourierParameters -> {-1, -1}]]
```

を実行します。なお、`Chop[]` 命令は、ゼロに近い近似実数を厳密な整数 0 に置き換えます。周波数領域における離散フーリエ変換 (離散周波数スペクトル密度) のグラフを描くと図 5.8 および図 5.9 のようになります。グラフを描くには、

```
ListPlot[Re[lx], PlotRange -> {Automatic, {Min[Re[lx]], Max[Re[lx]]}}]
```

および

```
ListPlot[Im[lx], PlotRange -> {Automatic, {Min[Im[lx]], Max[Im[lx]]}}]
```

を実行します。



図 5.8: 離散フーリエ変換の実部 ($\text{Re } X_k$)

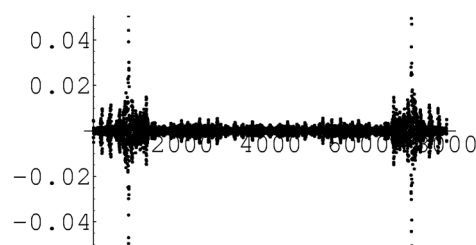


図 5.9: 離散フーリエ変換の虚部 ($\text{Im } X_k$)

周波数領域において、波の特徴を調べるには各周波数スペクトル (各周波数の振幅) の大きさを調べるのが重要となります。したがって、各周波数ごとに絶対値を取ってグラフを描くと図 5.10 のようになります (1000 番目あたりの周波数で一番大きい周波数スペクトルとなっています)。なお、グラフを描くには、

```
ListPlot[Abs[lx], PlotRange -> {Automatic, {0, Max[Abs[lx]]}}]
```

を実行します。

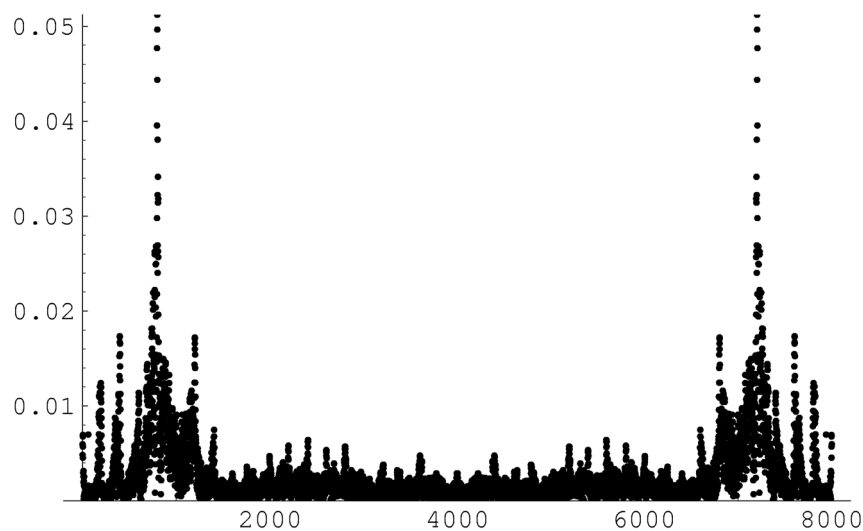


図 5.10: 離散フーリエ変換の絶対値 ($|X_k|$)

* 1 秒間に 8000 回サンプリングしていることから、離散化された波の要素数を 8000 で割ると、観測区間 (録音時間) T_0 [秒] が求まります。すなわち、 $\Delta f = 1/T_0$ [Hz] が求められます。

離散フーリエ積分を行なうには、`InverseFourier[]` 命令を使います。例えば、

```
x = Chop[InverseFourier[lx, FourierParameters -> {-1, -1}]]
```

を実行します (グラフなどの描き方は、離散フーリエ変換の場合と同様に行なうことができます)。なお、(離散フーリエ積分によって時間領域に戻した) 離散化された波をファイルに保存するには、

```
Export["output.wav", Sound[SampledSoundList[x, 8000]], "WAV"]
```

を実行します。

具体的な計算例については、ホームページにリンクされている「教材: Mathematica プログラム 11 (Mathematica ノートブック)」をご覧ください。

5.3 音声を加工してみよう!

この節では、図 5.11 の音声「あ」の離散化された波 (x_n) のグラフおよび図 5.12 の音声「あ」の離散フーリエ変換 (周波数スペクトル密度) の絶対値 ($|X_k|$) のグラフを基準に、離散フーリエ変換および離散フーリエ積分を使って、この離散化された波の検証や加工を行なってみましょう⁶。

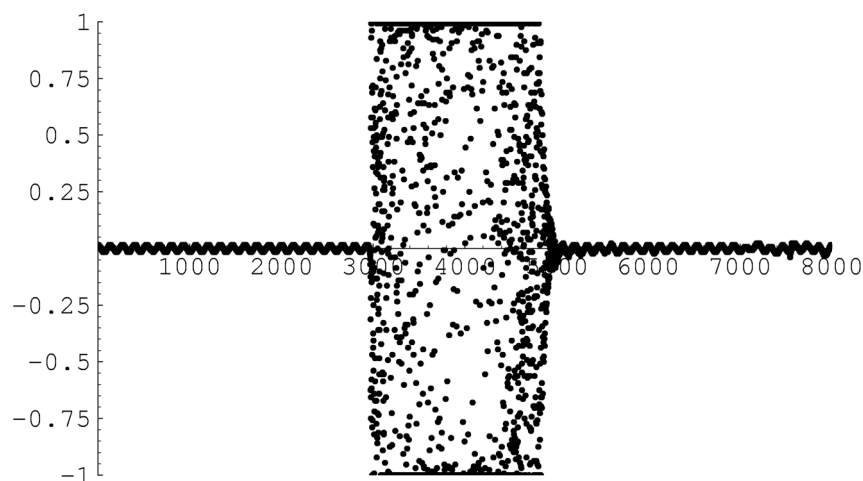


図 5.11: 音声「あ」の離散化された波 (x_n)

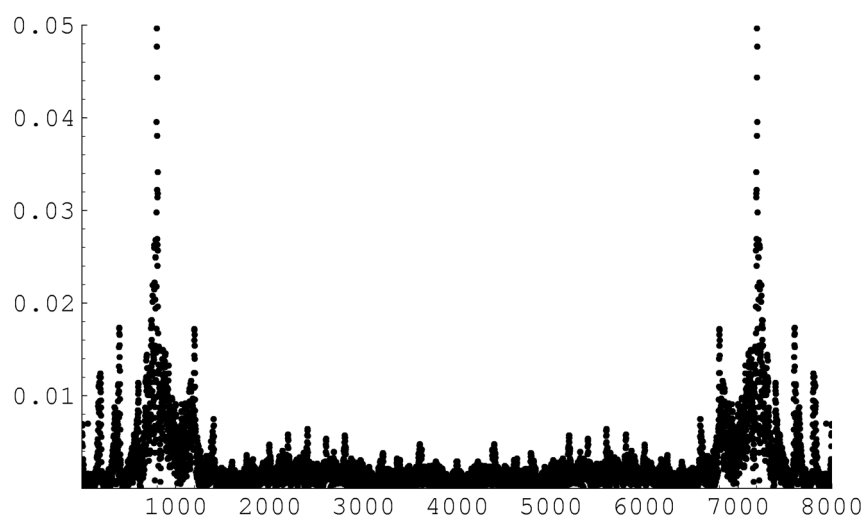


図 5.12: 音声「あ」の離散フーリエ変換の絶対値 ($|X_k|$)

⁶音声「あ」はホームページにリンクされています (ファイル名: **a.wav**)。なお、これらの音声は筆者のものですが、自分の音声で検証や加工を行なうと楽しさが倍増することでしょう。

図 5.11 および図 5.12 のグラフについて、次の点に注意してください。

- 音声「あ」は、観測区間を $[0, 1]$ ($T_0 = 1$ [秒]) とし、1 秒間に 8000 回のサンプリングを行った離散化された波である。
- 周波数分解能 Δf は $\Delta f = 1/T_0 = 1$ [Hz] となり、離散フーリエ変換によって周波数 -3999 [Hz] から 4000 [Hz] の周波数スペクトルに変換される (常に、正の周波数と負の周波数を考慮する)。
- Mathematica のプログラムでは、配列の添え字が 1 ずれていることに注意する。

5.3.1 音の主成分

図 5.12 の離散フーリエ変換 (周波数スペクトル密度) のグラフをみると、いくつかの周波数スペクトルの山が現れていることがわかります。この 1 つ 1 つの山がどのような音であるか調べてみることにしましょう。なお、図 5.12 の周波数スペクトルの山の詳細を知るために、図 5.13 の 0 [Hz] から 1500 [Hz] までの周波数スペクトルを拡大した周波数スペクトル密度のグラフをあげておきます。

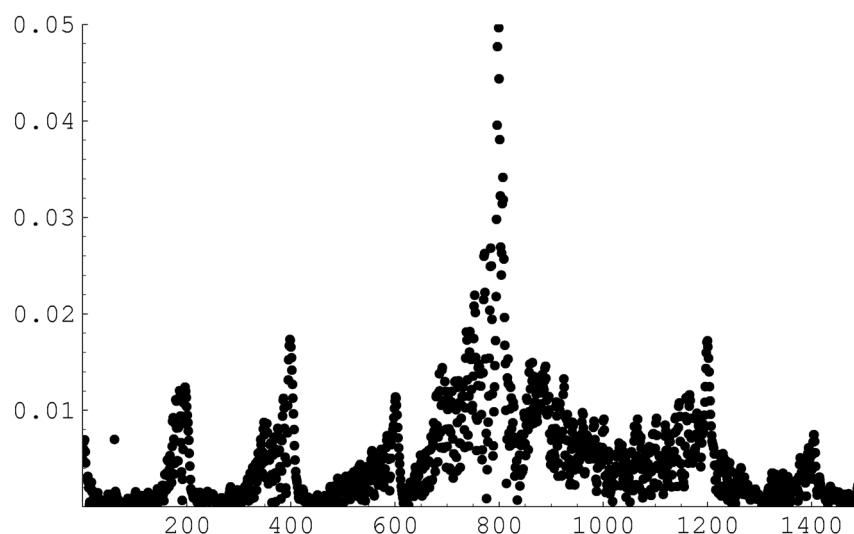


図 5.13: 図 5.12 の 0 [Hz] から 1500 [Hz] までの周波数スペクトルを拡大したグラフ

まず、周波数スペクトルの絶対値の最大値を含む山について調べてみましょう。Mathematica で計算すると、 797 [Hz] で最大値をとることがわかります⁷。図 5.14 のように、この周波数スペクトルの絶対値の最大値を含む山 ($630 \sim 850$ [Hz]) を切り取り⁸、離散フーリエ積分してこの山の音を聞いてみましょう。いかがでしょうか。高音ですが「あ」と聞こえるはずです。すなわち、この山 ($630 \sim 850$ [Hz] の周波数スペクトル) が、音声「あ」を構成する周波数スペクトルとなっていることがわかります。

⁷ 男性の声の主成分が 1000 [Hz] であることを考えると、筆者の声は平均より低い声であることがわかります。

⁸ 正の周波数に対応する負の周波数を切り取ることも忘れないでください。

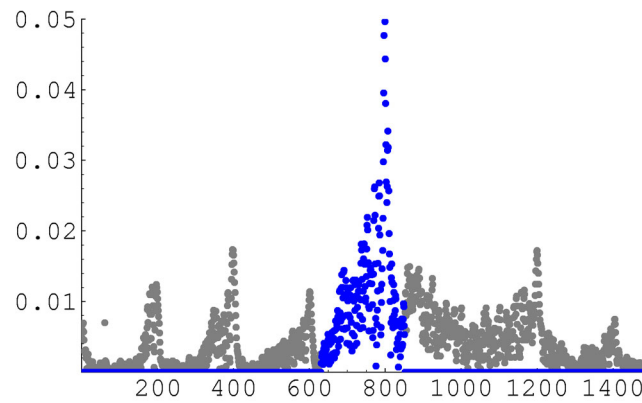


図 5.14: 周波数スペクトル 630～850 [Hz] を切り取った山

同様に、周波数スペクトルの絶対値の最大値を含む山の左隣の山 (図 5.15 参照)、さらに左隣の山 (図 5.16 参照) を切り取って聞いてみましょう。

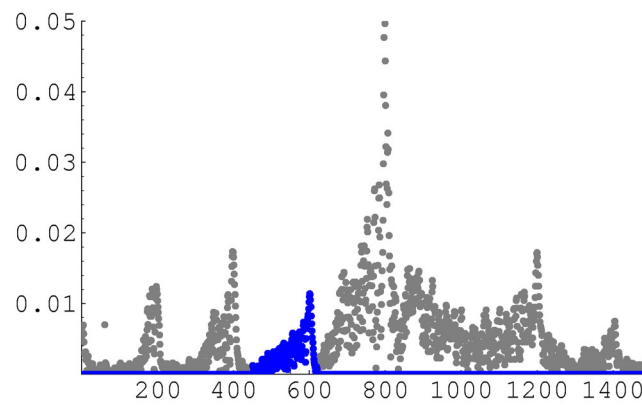


図 5.15: 周波数スペクトル 450～620 [Hz] を切り取った山

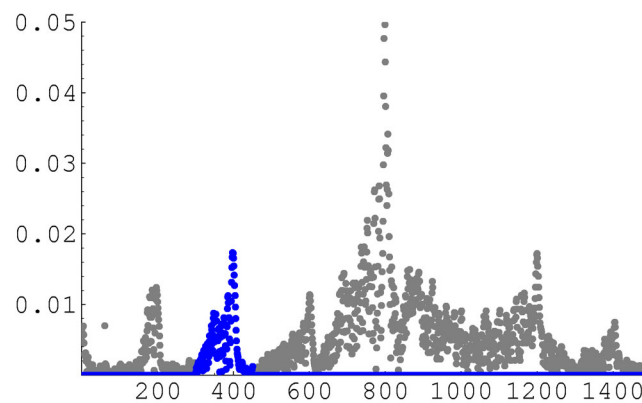


図 5.16: 周波数スペクトル 300～450 [Hz] を切り取った山

最後の、図5.16の音を聞いてみると、本来「あ」という音声だったはずですが、「い」とも「う」とも聞こえるような気がします。そこで、音声「い」、「う」、「え」、「お」を離散フーリエ変換して比較してみることにしましょう。音声「あ」、「い」、「う」、「え」、「お」を離散フーリエ変換すると図5.17のようになります(0~1000 [Hz] を抜粋)。いずれのグラフでも、山の現れる周波数が一定であることがよみとれます。これは、個人の声の音色というべきもので、各個人で異なります。私たちが暮らす実社会でも、このような事実を応用して、音声解析や音声認識にフーリエ変換が活用されています。

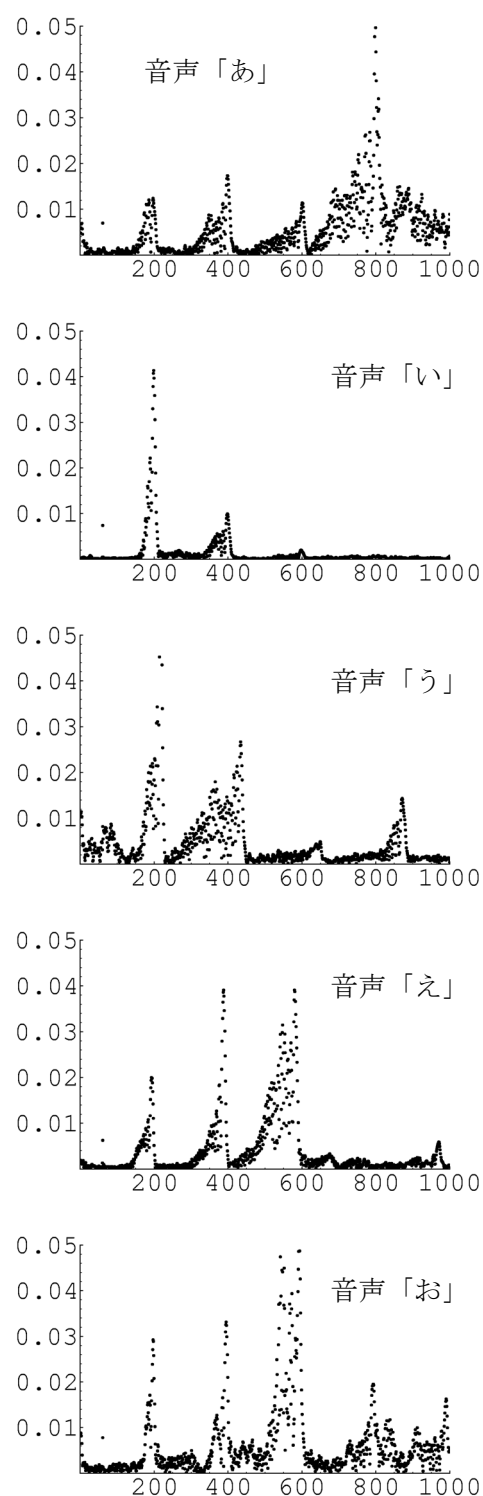


図 5.17: 音声の比較

5.3.2 ノイズ除去

図 5.11 の無音部分を注意深く見てみると図 5.18 のような規則的な波が現れていることがわかります。このような、本来必要としない邪魔なものを、**ノイズ** (noise; 雑音) と呼びます⁹。フーリエ変換を利用すると、このノイズを除去することができるので、ノイズを除去してみましょう¹⁰。

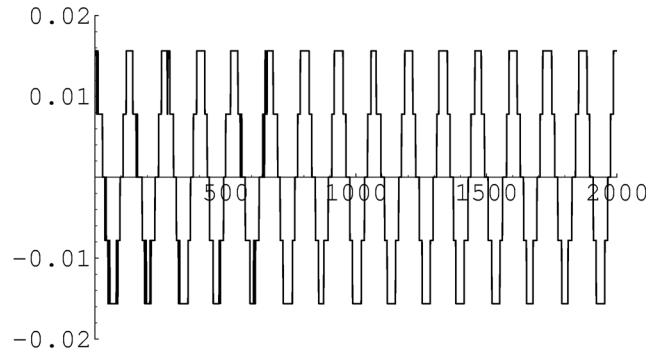


図 5.18: 無音部分の規則的な波 (ノイズ)

まず、このノイズがどのような波であるかを調べるために、観測区間 $[0, 0.25]$ ($T_0 = 0.25$ [秒], $\Delta f = 1/T_0 = 1/0.25 = 4$ [Hz]) に対して離散フーリエ変換を計算します。図 5.19 のような離散フーリエ変換の絶対値のグラフが得られ、Mathematica の計算結果から、60 [Hz] の周波数スペクトルだけが大きな値を示していることがわかります。すなわち、このノイズが 60 [Hz] の波であることがわかります (図 5.18 の波の個数を数えても確認できます)。

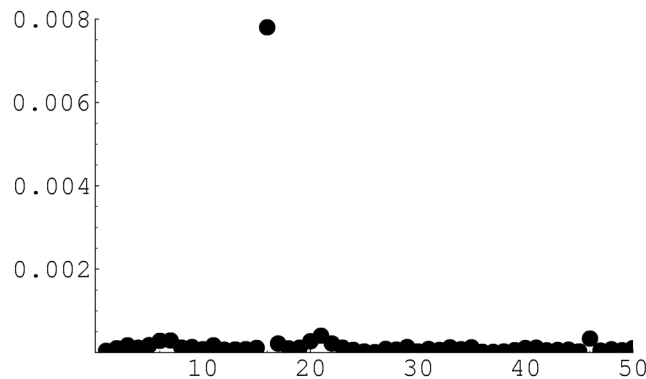


図 5.19: 無音部分の規則的な波の離散フーリエ変換の絶対値 (0~200 [Hz] を抜粋)

* 1 目盛あたり 4 [Hz] であることに注意しましょう。

⁹ この波の周波数が 60 [Hz] であることから、何らかのタイミングを取るため、または、何らかのタイミングを取った際に観測機器から混入したノイズであると推測されます。普通、自然界からこのような規則的な波をノイズとして観測することは珍しいことです。

¹⁰ ノイズは有音部分にも含まれているので、単に、無音部分の値を 0 にするだけでは不十分です。

前記の検証から、図 5.20 のように、音声「あ」の離散化された波を離散フーリエ変換した周波数スペクトルの内、60 [Hz] の周波数スペクトルを 0 に書き換えます (負の周波数も 0 にすることを忘れないでください)。書き換えた周波数スペクトルを離散フーリエ積分すると、図 5.21 のような、ノイズの除去された音声「あ」の離散化された波が得られます¹¹。

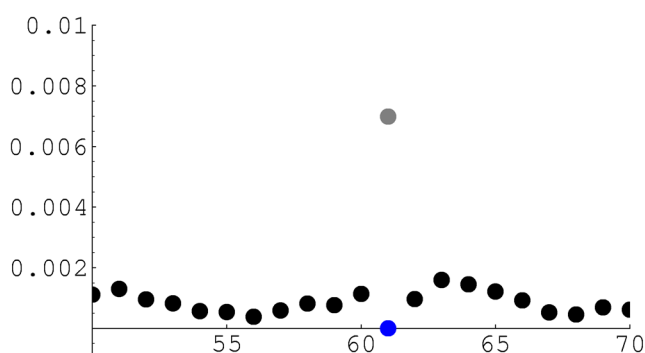


図 5.20: 60 [Hz] の周波数スペクトルを 0 に書き換え (50~70 [Hz] を抜粋)

* 添え字が 1 ずれていることに注意しましょう。

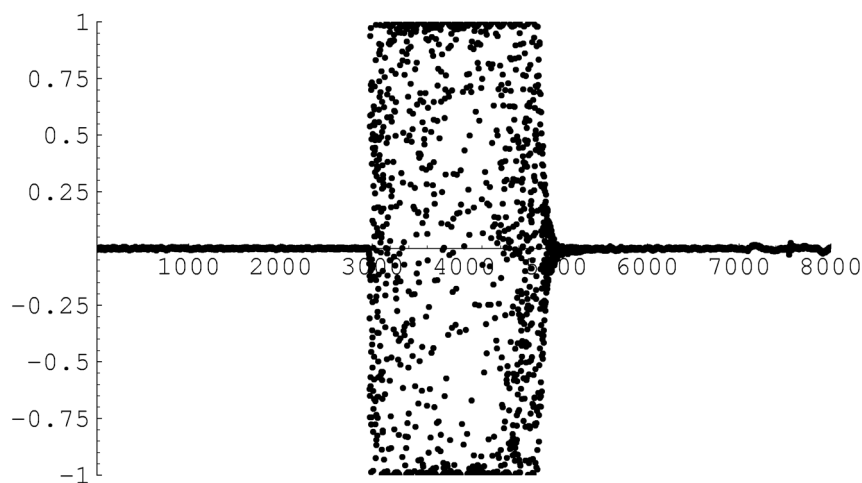


図 5.21: ノイズの除去された音声「あ」の離散化された波

¹¹ 音声として聞く分にはノイズを除去しなくても体感的には変わりませんが、厳密な観測結果が必要な場合には必ずノイズを除去する必要があります。ノイズが含まれたまま扱うと、計算結果に大きな誤差を生じたり、論理式に数値を代入したときに論理式を満たさないといったことが生じます。

これから紹介することは、ノイズ除去とは少々異なりますが、ノイズ除去を応用したものです。まず、音声「あ」の離散化された波を離散フーリエ変換し、図 5.22 のように、周波数スペクトルの 1500 [Hz] から 4000 [Hz] までを 0 にします。さらに、これを離散フーリエ積分すると図 5.23 のような離散化された波を得ます。このとき、元の音声「あ」の離散化された波のグラフと見た目も変わらず、実際に音を聞いてもあまり変わらないことを確認できます。

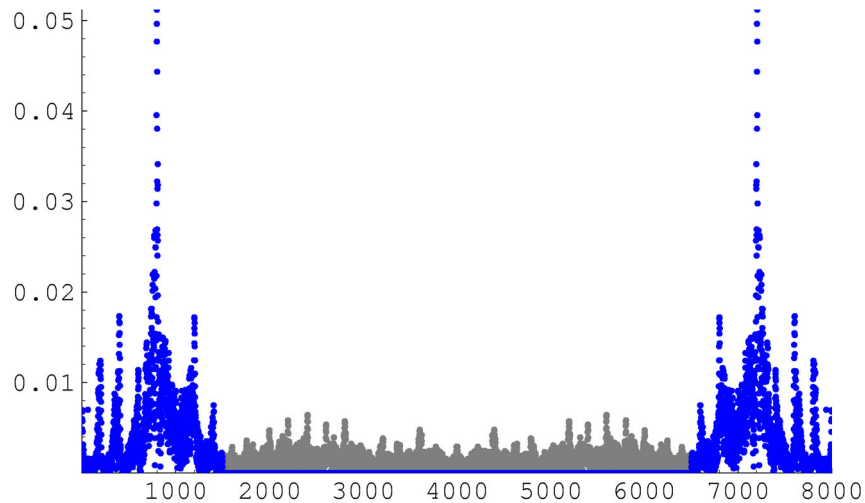


図 5.22: 1500 [Hz] から 4000 [Hz] までの周波数スペクトルを 0 に書き換え

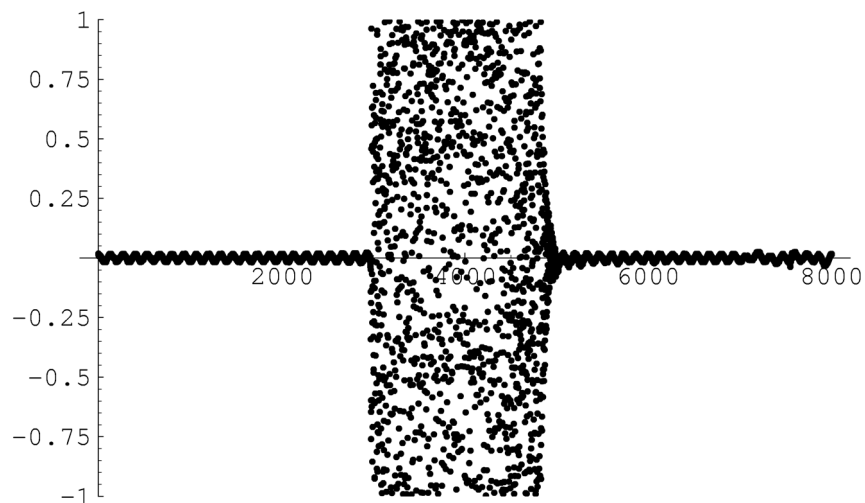


図 5.23: 図 5.22 を離散フーリエ積分して得られた離散化された波

このように、周波数領域において、ある程度の周波数スペクトルを削っても同じような音として聞き取ることができます (人間の耳をごまかすことができます)。さらに、周波数領域の形で音声を保存すれば、データ量を $\frac{1500}{4000} = 0.3875$ 、すなわち、約4割に抑えることができ、データ量を約6割減らすことができます (負の周波数が正の周波数の共役であることを利用すれば、さらにデータ量を半分にすることができます)。もちろん、音声として再生する際は、0を補って、離散フーリエ積分を施します。私たちが暮らす実社会でも、このような事実を応用して、**JPEG** に代表される画像圧縮、**MP3** に代表される音声圧縮、**MPEG** に代表される動画像・音声圧縮などに利用されています。これらは、データの正確さよりデータ量の少なさを重視した考え方によるものです。悪い言い方をすれば、人間の目や耳をどこまでごまかせるかという観点からデータ圧縮を行なっています。

- **JPEG**: 「ジェーペグ」と読む。Joint Photographic coding Experts Group の略称で、静止画像などを圧縮・伸長させる機能を実現する規格。インターネット上の画像データ (特に写真) によく使われる形式。
- **MP3**: 「エムピースリー」と読む。MPeg audio layer 3 の略で、音声データのデジタル圧縮技術 (名前の通り、MPEG の仲間)。オーディオ・音楽専用に使われる形式。
- **MPEG**: 「エムペグ」と読む。Moving Picture coding Experts Group の略称で、リアルタイム (実時間) で動画像と音声を圧縮・伸長させる機能を実現する規格。DVD・VIDEO CD・デジタルテレビ放送などで使われている形式。

5.3.3 ボイスチェンジャー

最後に、離散フーリエ変換を使って、男性の声を女性の声に、または、女性の声を男性の声に変換してみましょう。いわゆる、ボイスチェンジャーを作ってみましょう。男性の声の主成分が 1000 [Hz]、女性の声の主成分が 2000 [Hz] であることを考慮すれば、周波数領域において、男性の声から女性の声への変換は周波数スペクトルを +1000 [Hz] 平行移動し、女性の声から男性の声への変換は周波数スペクトルを -1000 [Hz] 平行移動すればよいことがわかります。

例えば、図 5.24 のように、音声「あ」(男性の声)の離散化された波の離散フーリエ変換を加工(+1000 [Hz] 平行移動)し、離散フーリエ積分すれば、女性のような高い音の音声を聞くことができます。

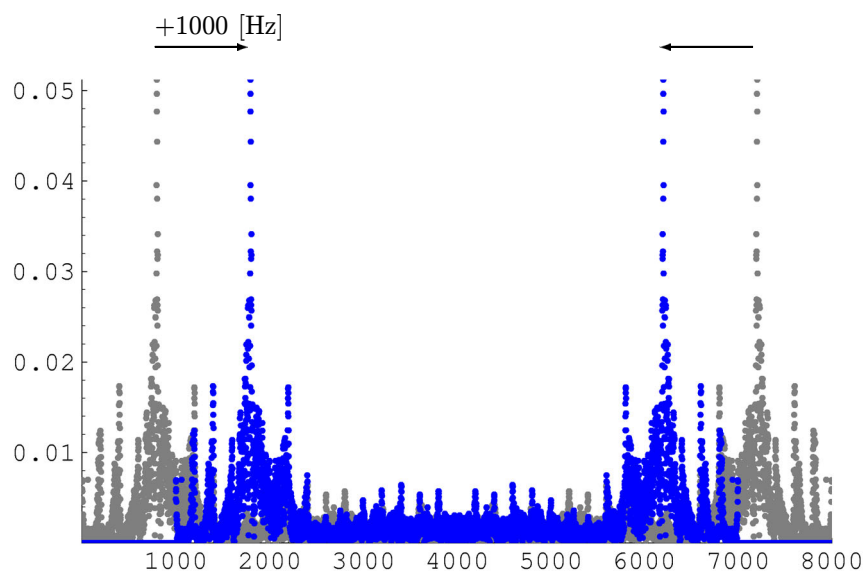


図 5.24: 男性の声から女性の声へ

逆に、図 5.25 のように、音声「あ」(男性の声)の離散化された波の離散フーリエ変換を加工(-500 [Hz] 平行移動)し、離散フーリエ積分すれば、元の声よりさらに低い音の音声を聞くことができます。なお、女性の声で実験すれば男性のような低い音の声を聞くことができることでしょう。

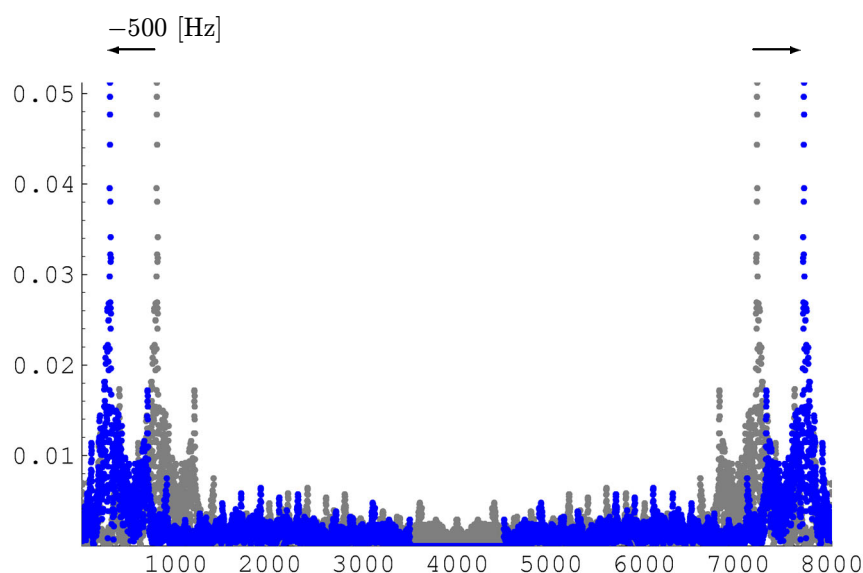


図 5.25: 男性の声をより低く (女性の声から男性の声へ)

如何だったでしょうか。本テキストを通して、数学を身近に感じていただければ幸いに思います。

参考文献

- [1] 樋口 禎一, 八高 隆雄 著、フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本 (理工系数学の基礎・基本③)、(有) 牧野書店、2000 年
- [2] 洲之内 源一郎 著、フーリエ解析とその応用 (サイエンスライブラリ 理工系の数学=12)、株式会社 サイエンス社、1977 年
- [3] 三谷 政昭 著、今日から使えるフーリエ変換 (今日から使えるシリーズ)、株式会社 講談社、2005 年
- [4] 田代 嘉宏 著、応用解析要論 (応用数学要論シリーズ 別巻)、森北出版 株式会社、1986 年
- [5] Wilfred Kaplan 著、工科のための複素解析入門、東京図書株式会社、1977 年
- [6] 加藤 久子 著、概説 微分積分 (数学基礎コース=Q2)、株式会社 サイエンス社、1999 年
- [7] Stephen Wolfram 著、**Mathematica –A System for Doing Mathematics by Computer (日本語版)– Second Edition**、アジソン・ウエスレイ・パブリシャーズ・ジャパン 株式会社、1995 年

索引

60 分法, 2

A-D 変換器, 95

cosine, 2

cos 波形, 7

D-A 変換器, 95

DFT, 102

FFT, 114

JPEG, 136

MP3, 136

MPEG, 136

radian, 2

sine, 2

sin 波形, 7

tangent, 2

アナログ, 95

アルゴリズム, 114

オイラー (Euler) の公式, 15

ガウス (Gauss) 平面, 13

角速度, 7

奇関数, 6

ギブスの現象, 37

逆フーリエ変換, 63

極座標表示, 14

偶関数, 6

区分的になめらか, 29

区分的に連続, 28

計算量, 114

高速フーリエ変換, 114

弧度法, 2

再帰的, 114

三角関数, 2

三角波, 34

サンプリング, 86, 95

サンプリング周波数, 99

時間領域, 78

周期, 1

周期関数, 1

周波数, 2

周波数スペクトル密度, 79

周波数分解能, 99

周波数領域, 78

初期位相, 11

振幅, 7

スペクトル, 79

正規直交関数系, 24

正弦, 2

正接, 2

直交関数系, 24

直交座標表示, 13

テイラー (Taylor) 展開, 14

ディリクレ (Dirichlet) 核, 53

ディリクレ (Dirichlet) 積分, 53

デジタル, 95

波のフーリエ積分, 78

波のフーリエ変換, 78

ネピアの数, 14

ノイズ, 133

のこぎり波, 34

パーセバル (Parseval) の等式, 51

バタフライ演算, 114

反転公式, 63

フーリエ級数, 27

フーリエ級数展開, 28

フーリエ係数, 27

フーリエ正弦級数, 40

フーリエ正弦係数, 40

フーリエ正弦変換, 67

フーリエ積分, 62

フーリエ変換, 63

フーリエ余弦級数, 38

フーリエ余弦係数, 39

フーリエ余弦変換, 66

複素フーリエ級数, 30

複素フーリエ級数展開, 30

複素フーリエ係数, 30

複素平面, 13

分解能, 86

分割統治法, 114

平均 2 乗誤差, 49

ベッセル (Bessel) 関数, 58

ベッセル (Bessel) の不等式, 50

偏角, 2, 14

方形波, 46

余弦, 2

リーマン (Riemann) ・ ルベーグ (Lebesgue)

の定理, 51

離散逆フーリエ変換, 112

離散周波数スペクトル密度, 102

離散フーリエ積分, 112

離散フーリエ変換, 102

本テキストに関するご意見・ご質問・ご指摘等は、返信用の電子メールアドレスを明記の上、下記の著者電子メールアドレスへお願いします。なお、本テキストの内容を逸脱すると思われるお問い合わせや、筆者のスキルの及ばない範囲のお問い合わせについては、お答えいたしかねますのでご了承ください。

離散数理 テキスト

～ フーリエ変換で音声を加工してみよう! ～

2006 年 10 月 5 日 第 1 版 (情報数理 テキスト)

2007 年 4 月 11 日 第 2 版

著者： 幸山 直人 (こうやま なおと)

電子メールアドレス： nkouyama@sci.u-toyama.ac.jp

ホームページアドレス： <http://kouyama.math.u-toyama.ac.jp/main/>

発行： 富山大学 理学部 数学教室

ホームページアドレス： <http://www.sci.u-toyama.ac.jp/math/indexJ.html>

離散数理 テキスト

～ フーリエ変換で音声を加工してみよう! ～

