第1章　波

1.1　周期関数と三角関数

関数 (波) の中には、図 1.1 のように一定の間隔で同じ波形を繰り返す関数があります。このような関数を**周期関数**と呼び、これら周期関数が持つ一定の間隔を**周期**と呼びます[1]。このテキストでは、時間 t [秒] に得られた信号値 $x(t)$ の関数をフーリエ変換の対象として扱います。したがって、登場する全ての関数が 1 変数関数であることに注意し、以後の内容を読み進めて下さい。

定義 1 関数 $x(t)$ が

$$x(t+T) = x(t)$$

を満たすとき、関数 $x(t)$ は周期関数である。ただし、T は周期関数 $x(t)$ の周期とする。

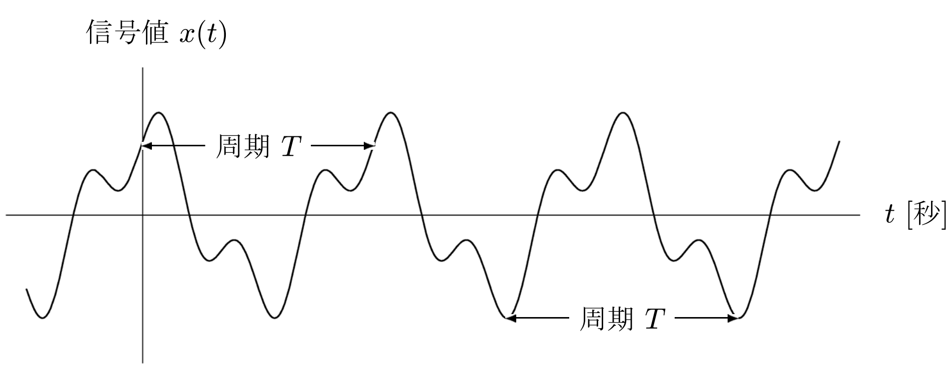


図 1.1: 周期関数の例

[1]第 3 章では、周期関数にとどまらず、多くの一般的な関数についてフーリエ級数展開できることを述べます。

まず最初に、周期関数を扱うにあたって**周期**と**周波数**の重要な関係について述べておきます。**周波数**は、1 秒間に含まれる同じ波形の波の個数で、記号 f [Hz] (または [回転/秒]) で表します[2]。いま、周期関数の周期[3]を記号 T [秒] で表せば、周波数 f [Hz] は周期 T [秒] の逆数

$$f = \frac{1}{T} \ [\text{Hz}]$$

によって得られます。逆に、周期 T [秒] は周波数 f [Hz] の逆数

$$T = \frac{1}{f} \ [\text{秒}]$$

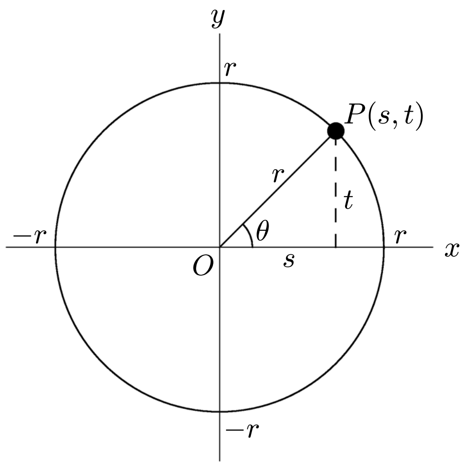
によって得られます。これらは、周期関数にとって最も重要な関係式なので覚えておきましょう。なお、このテキストでは、一貫して、記号 T [秒] は周期を、記号 f [Hz] は周波数を、それぞれ表します。

私たちにとって最も身近な周期関数は、**三角関数**と呼ばれ、角 θ [rad] を変数とする[4]

- $\sin\theta$ (**sine**; **正弦**),
- $\cos\theta$ (**cosine**; **余弦**),
- $\tan\theta$ (**tangent**; **正接**)

の 3 つの関数です。周期は、$\sin\theta$ および $\cos\theta$ がそれぞれ 2π [rad]、$\tan\theta$ が π [rad] です。もちろん、これらの関数は、右下の図のように $x\,y$ 平面上に点 $P(s,t)$ を与えたとき、

- $\sin\theta = \dfrac{s}{r} \quad \left(\theta = \arcsin\dfrac{s}{r}\right)$,
- $\cos\theta = \dfrac{t}{r} \quad \left(\theta = \arccos\dfrac{t}{r}\right)$,
- $\tan\theta = \dfrac{t}{s} \quad \left(\theta = \arctan\dfrac{t}{s} = \tan^{-1}\dfrac{t}{s}\right)$,
- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{r}{t}$ ← 正割 (secant),
- $\csc\theta = \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{r}{s}$ ← 余割 (cosecant),
- $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{s}{t}$ ← 余接 (cotangent)



によって定義されます[5] (角 θ [rad] は、点 P の**偏角** (argument) とも呼ばれます)。また、定義より、三角関数の基本的な性質

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

[2]1968 年、ドイツの物理学者 H. R. Hertz (ヘルツ) にちなんで、周波数を表す単位に「Hz (ヘルツ)」が正式採用されました。それ以前は「cycle (サイクル)」が使用されていました。

[3]周期は 1 周期 (1 回転) あたりの時間を表すので、周期の正確な単位は [秒/回転] となります。

[4]三角関数の角の表記方法には、[rad] (ラジアン; **radian**) という単位で表す**弧度法**を用います。なお、高校で習う角の表記方法は、[°] (度) を単位とする **60 分法**と呼ばれるものです。弧度法と 60 分法には π [rad] $= 180$ [°] なる相互関係があります。

[5]「arc」は「弧」という意味で、$\arcsin\theta$ は $\sin\theta$ の弧の長さを指します。

も導かれます。補足として、三角関数のグラフを図 1.2 に、三角関数の代表的な値を表 1.1 に、それぞれ挙げておきます (復習を兼ねて、表 1.1 の空欄を埋めてみましょう)。

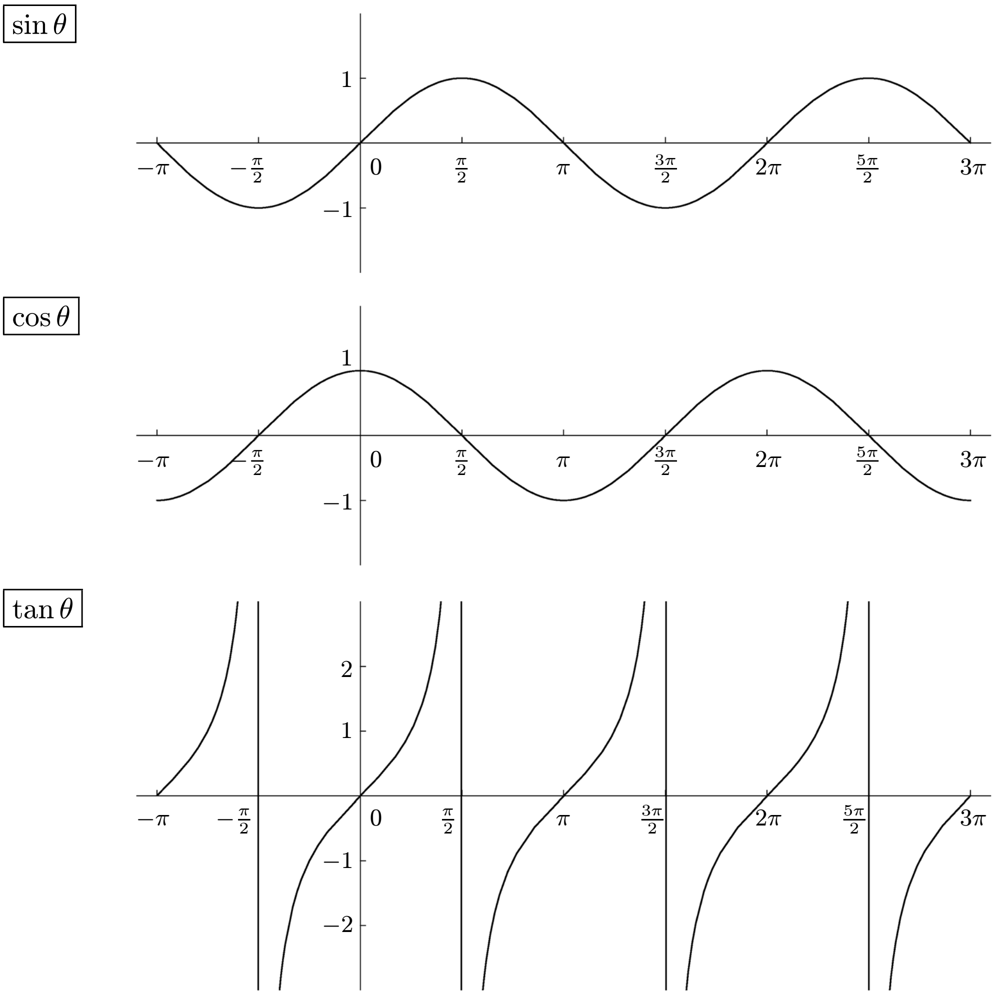


図 1.2: 三角関数のグラフ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	-1				0				1				0	-1	0
$\cos\theta$	0				1				0				-1	0	1
$\tan\theta$	$\pm\infty$				0				$\pm\infty$				0	$\pm\infty$	0

表 1.1: 三角関数の代表的な値

復習を兼ね、三角関数の性質について列挙しておきます。まず、三角関数は周期関数ですから、周期関数の定義より、関係式

$$\sin\theta = \sin(\theta + 2\pi), \qquad \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi), \qquad \tan\theta = \tan(\theta + \pi)$$

が成り立ちます。このことより、次の定理を得ます。

定理 1.1 n が整数のとき、三角関数について以下の関係が成り立つ。

(1) $\sin\theta = \sin(\theta + 2n\pi)$.

(2) $\cos\theta = \cos(\theta + 2n\pi)$.

(3) $\tan\theta = \tan(\theta + n\pi)$.

また、三角関数の性質から、次の定理が成り立ちます。

定理 1.2 三角関数について以下の関係が成り立つ。

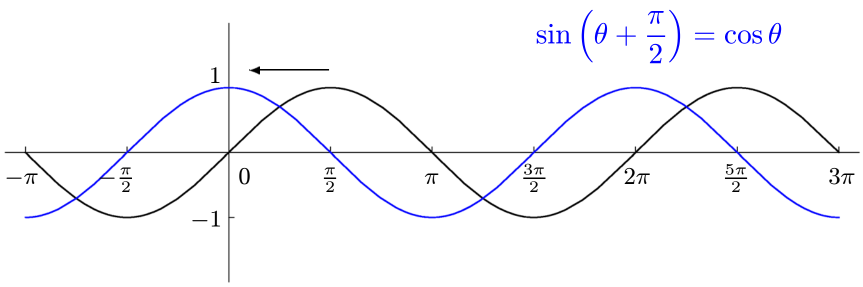
(1) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$.

(2) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$.

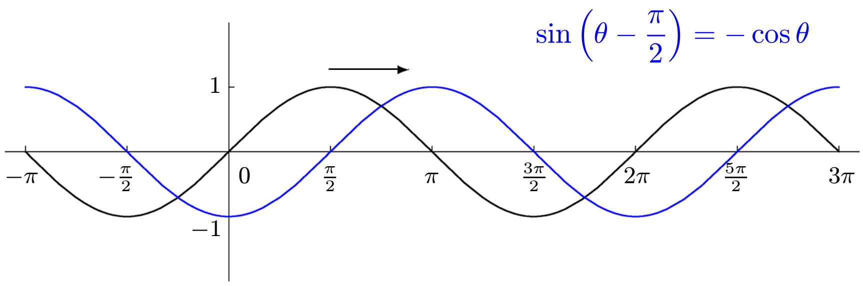
(3) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$.

(4) $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$.

定理 1.2 の (1) の $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ は、$\sin\theta$ のグラフを横軸に $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] だけ左に平行移動したもので、このグラフは $\cos\theta$ のグラフに一致します (下図)。



同様に、定理 1.2 の (2) の $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$ は、$\sin\theta$ のグラフを横軸に $\dfrac{\pi}{2}$ [rad] だけ右に平行移動したもので、このグラフは $-\cos\theta$ のグラフに一致します (下図)。



任意の角 α, β [rad] に対して、次の定理が成り立ちます。

定理 1.3 (加法定理) 三角関数について以下の関係が成り立つ。

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

(2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$

(3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

(4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

さらに、定理 1.3 より、次の定理を得ます。

定理 1.4 三角関数について以下の関係が成り立つ。

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right).$

(2) $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right).$

(3) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right).$

(4) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right).$

その他にも、**半角の公式**、**倍角の公式**、**3 倍角の公式**、$\cdots$ などが導かれます。また、定理 1.3 の加法定理を用いると、三角関数の合成を行なうことができます。A, B を実数の定数とすれば、関数 $A\sin\alpha + B\cos\alpha$ は、

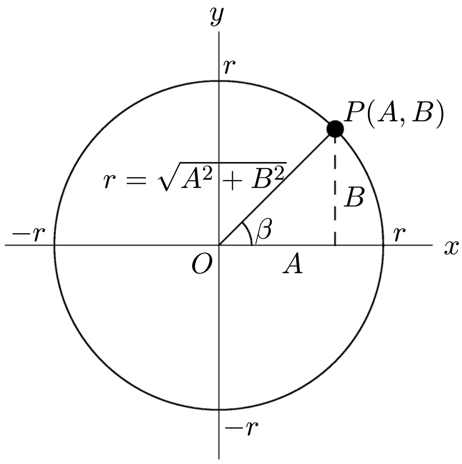
$$\begin{aligned} &A\sin\alpha + B\cos\alpha \\ &\quad= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\alpha + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\alpha\right) \end{aligned}$$

と変形できるので、右図より

$$\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

とおくと、あらためて

$$(\text{与式}) = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)$$



と書き表せます。右辺の $\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$ は、定理 1.3 の (1) の右辺に一致することから、

$$A\sin\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\ \sin(\alpha+\beta)$$

という関係式が得られます。

この節の締めくくりとして、三角関数の対称性について見ておきましょう。

定義 2

(1) 関数 $x(t)$ が $x(-t) = -x(t)$ を満たすとき、関数 $x(t)$ は**奇関数**であるという。

(2) 関数 $x(t)$ が $x(-t) = x(t)$ を満たすとき、関数 $x(t)$ は**偶関数**であるという。

定義より、三角関数の対称性は以下のようになります。

- $\sin\theta$ は奇関数である ($\because \sin(-\theta) = -\sin\theta$)。
- $\cos\theta$ は偶関数である ($\because \cos(-\theta) = \cos\theta$)。
- $\tan\theta$ は奇関数である ($\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$)。

なお、これまでに挙げた三角関数の性質や関係式が、これから学ぶフーリエ級数展開やフーリエ変換にとって、非常に重要であることを付け加えておきます。

1.2 波としての三角関数

最初にも述べたように、このテキストでは時間 t [秒] における信号値 $x(t)$ の関数を扱います。したがって、周期関数の中で最も基本的な三角関数を、時間 t [秒] における信号値 $x(t)$ の関数に書き換えましょう。すなわち、三角関数を物理的な波として捉え直しましょう[6]。結論から述べれば、三角関数 $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は、時間 t [秒] を変数とする関数 (信号値)

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

に書き換えられます。なお、前者を sin **波形**の関数、後者を cos **波形**の関数といい、三角関数の関係 (定理 1.2) を用いて相互に書き換えることができます。

まず、$\phi = 0$ とした関数

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t)$$

について考察しましょう。三角関数の変数 θ [rad] は弧度法による表記でしたから、

$$\theta = \omega t \text{ [rad]}$$

の関係が成り立ちます。記号 t [秒] の単位を考慮すれば、

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ [rad/秒]}$$

となります。これは、距離 (θ) と時間 (t) と速度 (ω) の関係に似ていて、ω は**角速度**と呼ばれます (通常、記号 ω が使用されます)。また、記号 A は**振幅**と呼ばれ、sin 波形および cos 波形の**波の大きさ** (振動する幅) を表します。言い換えれば、関数

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad \text{と} \quad x(t) = A\cos(\omega t)$$

は、図 1.3 のように半径 A の円周上を角速度 ω [rad] で回転する点を観測したものといえます。

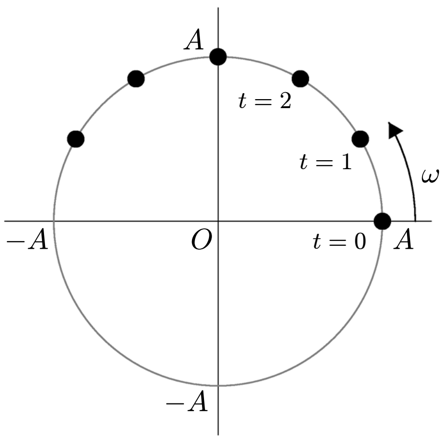


図 1.3: 円周上を点が回転している様子

[6] 例えば、岸壁に打ち寄せる波の高低を観測している様子を想像してください。

より詳しく述べれば、$x(t) = A\sin(\omega t)$ のグラフは回転する点を縦軸に射影したもの (位置) を時系列に並べたもので、$x(t) = A\cos(\omega t)$ のグラフは回転する点を横軸に射影したもの (位置) を時系列に並べたものです (図 1.4)。

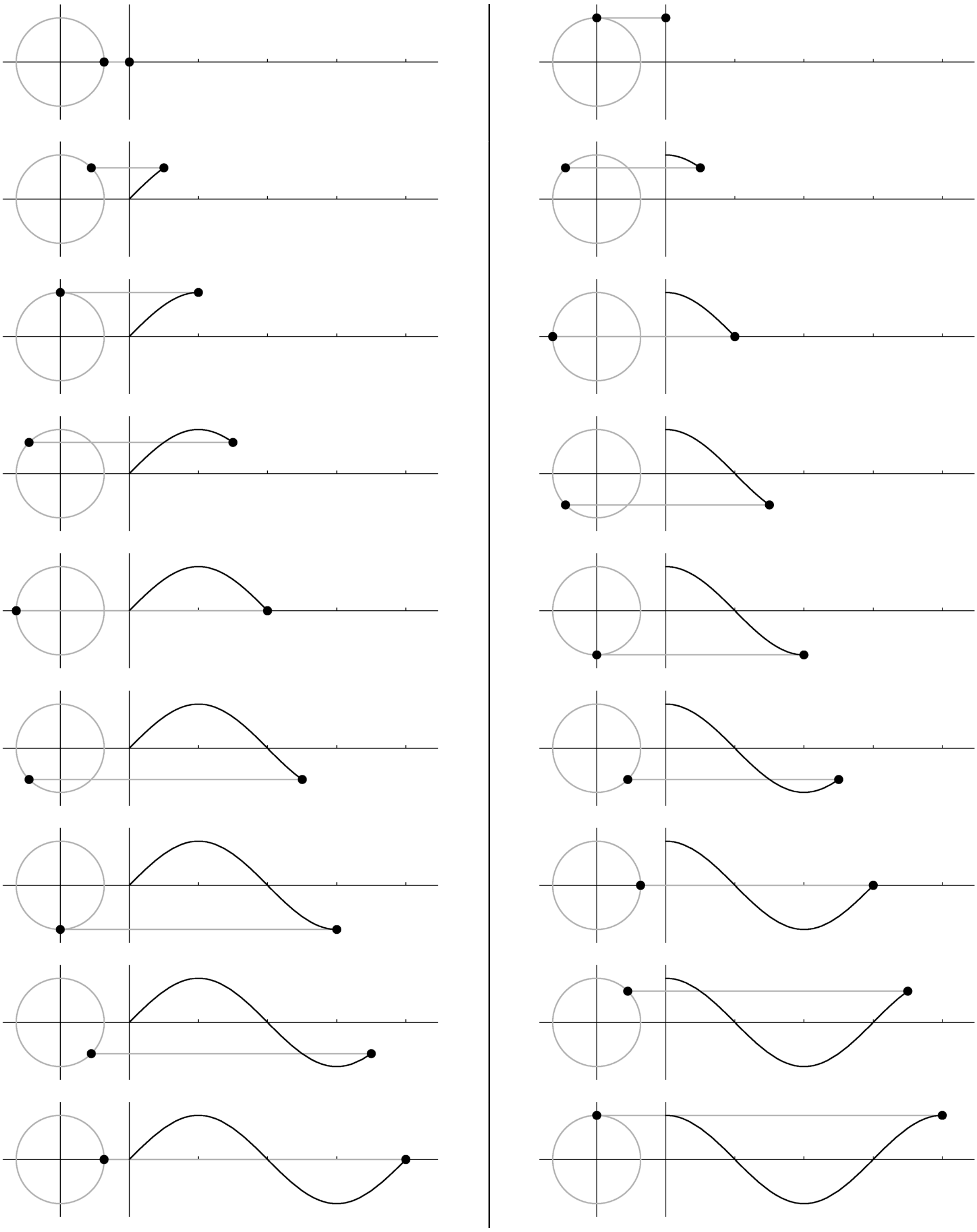
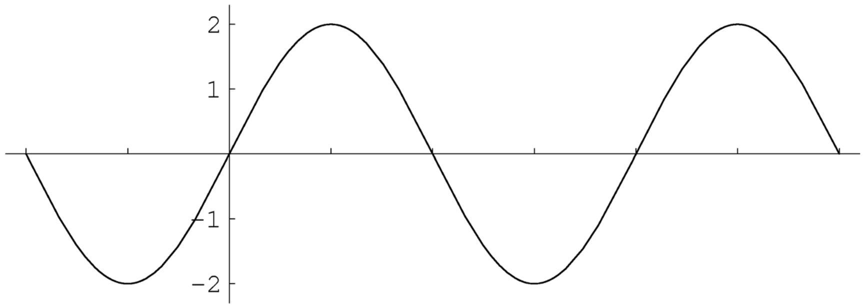


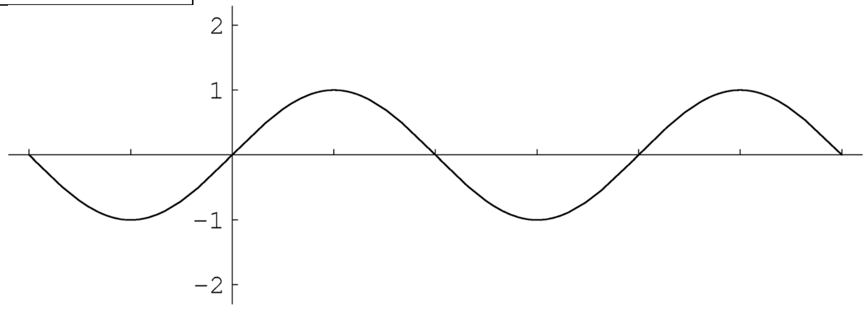
図 1.4: 回転する点と信号値 $x(t)$ の関係

振幅 A の違いによる sin 波形の関数を比較しておきましょう (図 1.5)。

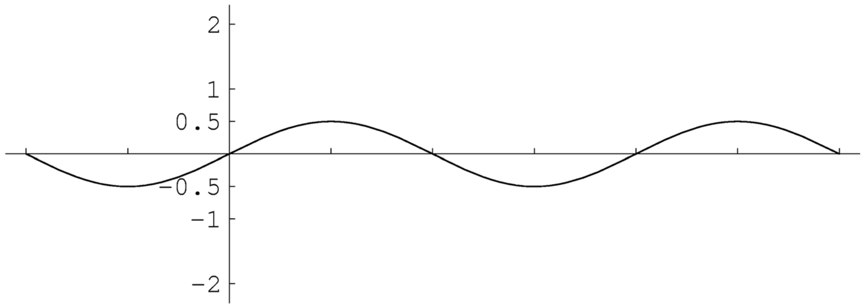
$\boxed{A = 2 \text{ の場合}}$



$\boxed{A = 1 \text{ の場合 (基準となる振幅)}}$



$\boxed{A = 0.5 \text{ の場合}}$



$\boxed{A = -1\ (< 0) \text{ の場合}}$

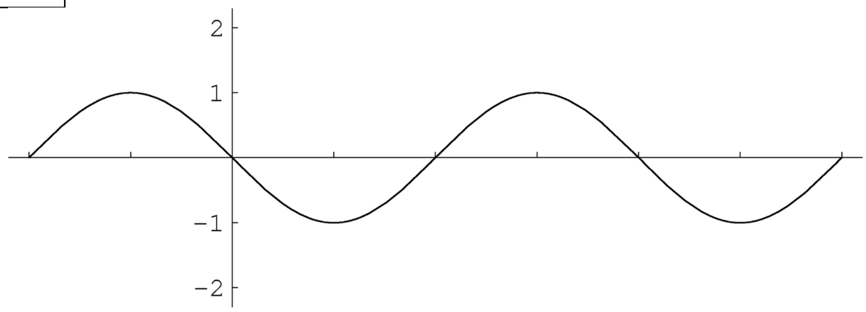
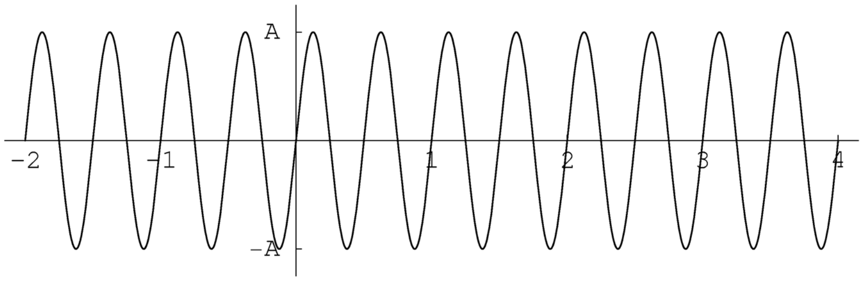


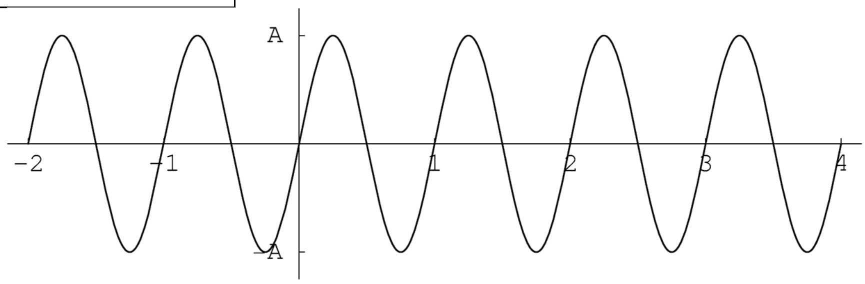
図 1.5: 振幅の違いによる波形の比較

角速度 ω [rad/秒] の違いによる sin 波形の関数を比較しておきましょう (図 1.6)。

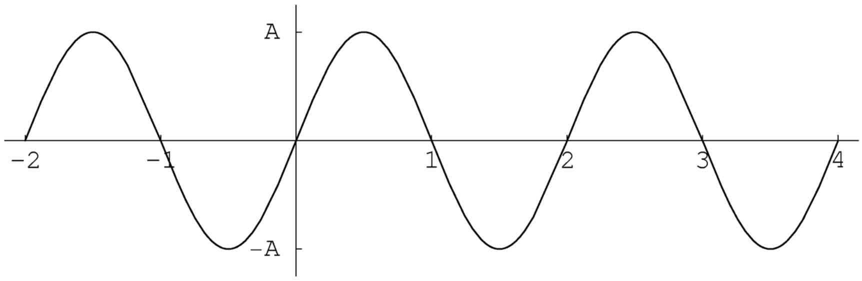
$\boxed{\omega = 4\pi \text{ の場合}}$



$\boxed{\omega = 2\pi \text{ の場合 (基準となる角速度)}}$



$\boxed{\omega = \pi \text{ の場合}}$



$\boxed{\omega = -2\pi\ (< 0) \text{ の場合}}$

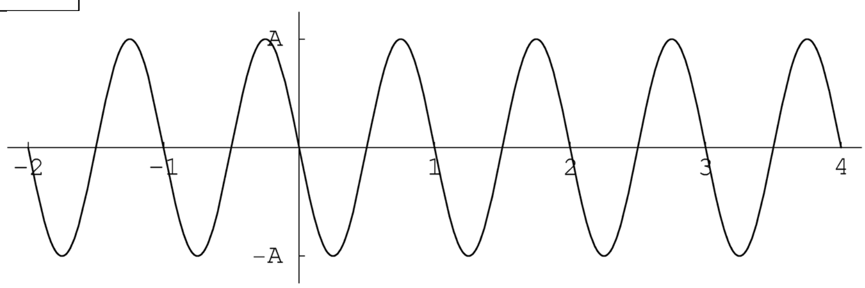


図 1.6: 角速度の違いによる波形の比較

ここで注意していただきたいのは、三角関数を波として捉える場合は、図 1.6 のように角速度 ω [rad/秒] に π を含む数値が選ばれていることです。なぜなら、sin 波形や cos 波形の関数に対して、時間 t [秒] に 0, 1, 2, $\cdots$ の整数値を与えたとき、その信号値 $x(t)$ が表 1.1 の三角関数の代表値を取り、数値的に扱い易くなるからです (数学的にはどのように選んでも全く問題ありません)。

また、図 1.6 のグラフから次の関係が得られます。例えば、角速度 $\omega = 4\pi$ [rad/秒] の場合、1 秒間に 2 つの波を含むことから周期 $T = 0.5$ [秒] と周波数 $f = 2$ [Hz] が読み取れます。さらに、角が1 [Hz] **あたり** 2π [rad] **進む**ことに注意すれば、1 秒間に進んだ角は、関係

$$\begin{aligned} &4\pi \text{ [rad/秒]} \times 1 \text{ [秒]} = 2\pi \text{ [rad/Hz]} \times 2 \text{ [Hz]} \\ &\Longleftrightarrow \omega \text{ [rad/秒]} \times 1 \text{ [秒]} = 2\pi \text{ [rad/Hz]} \times f \text{ [Hz]} \end{aligned}$$

を満たします。したがって、関係

$$\omega = 2\pi f$$

が得られます。周期 T [秒] と周波数 f [Hz] の関係 $f = \dfrac{1}{T}$ を用いれば、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

という関係も得られます (1 周期 (回転) に進む角 2π [rad] を、掛かった時間 (周期) T [秒] で割れば、角速度 ω [rad/秒] が求められます)。これらの関係から関数を

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(2\pi f t), & x(t) &= A\cos(2\pi f t), \\ x(t) &= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & x(t) &= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned}$$

と表すことも度々あります。上記の 2 つの関係

$$\omega = 2\pi f \qquad と \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

は、非常に重要なので理解して (覚えて) おきましょう。

さて、関数

$$x(t) = A\sin(\omega t) \quad と \quad x(t) = A\cos(\omega t)$$

については理解できたので、最終的な関数

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad と \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

について考察して行きましょう。理解しやすいように、ここでは sin 波形の関数にしぼって話を進めます (cos 波形の関数についても同様の考察を行なうことができます)。関数を数学的に見れば

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\sin\left(\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)$$

と変形できますから、$t' = t + \dfrac{\phi}{\omega}$ とおけば、

$$x\left(t' - \frac{\phi}{\omega}\right) = A\sin(\omega t')$$

と書き換えられます。したがって、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ を左右 (横軸方向) に平行移動した関数として捉えることができます。このような ϕ を、波の世界では**初期位相**と呼びます。単位は [rad] です。なお、$\dfrac{\phi \text{ [rad]}}{\omega \text{ [rad/秒]}}$ の単位が [秒] となることにも注意しておきましょう。

それでは、具体的に関数のグラフを描くことで、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ について理解を深めましょう。振幅 $A = 1$, 角速度 $\omega = 2\pi$ [rad/秒] として、初期位相 $\phi = \frac{\pi}{4}$ [rad] と初期位相 $\phi = -\frac{\pi}{4}$ [rad] のグラフをそれぞれ描くと図 1.7 のようになり、関数 $x(t) = \sin(2\pi t)$ のグラフをそれぞれ、左に 0.125 [秒]、右に 0.125 [秒]、平行移動したグラフとなります ($|\phi|/\omega = 0.125$ [秒])。

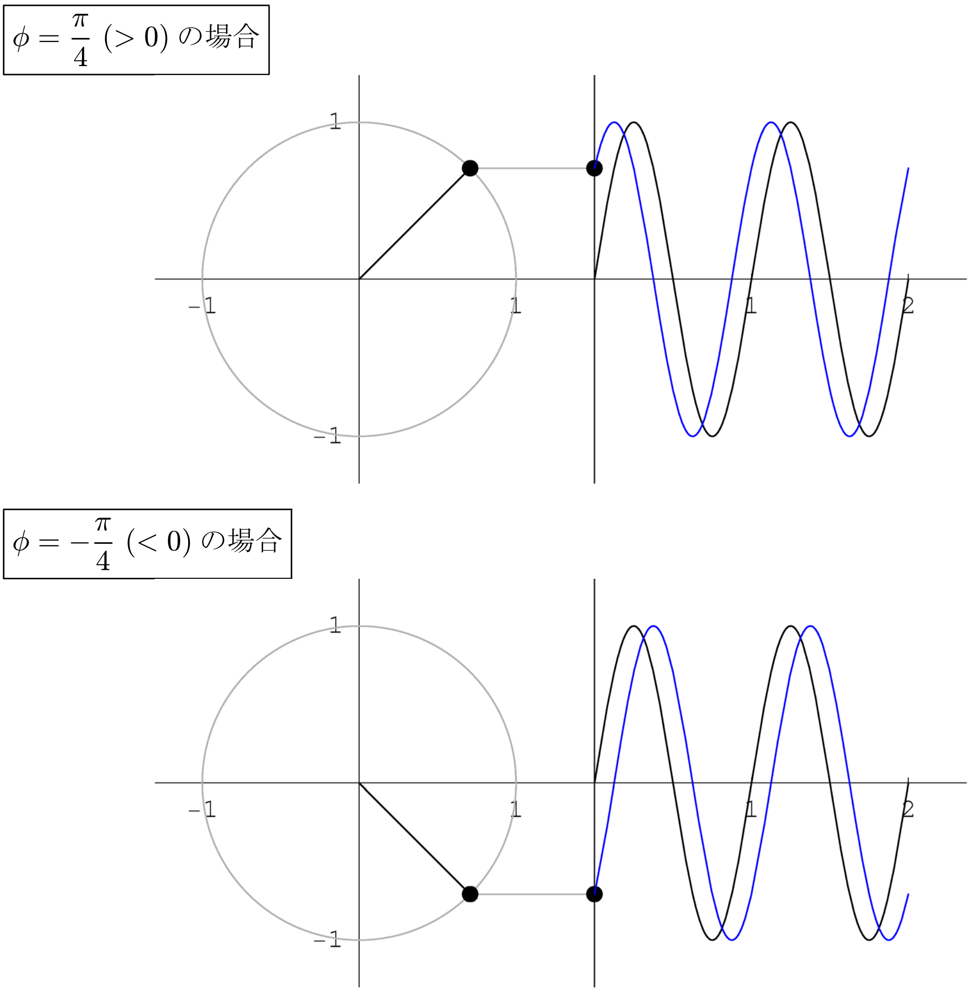


図 1.7: 初期位相の違いによる波形の比較

波の世界では、$\phi > 0$ のとき、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は、

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の位相を $|\phi|$ [rad] 進めた波形である**」または

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の時間を $|\phi|/\omega$ [秒] 進めた波形である**」

といいます。逆に、$\phi < 0$ のとき、関数 $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は、

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の位相を $|\phi|$ [rad] 遅らせた波形である**」または

「**関数 $x(t) = A\sin(\omega t)$ の時間を $|\phi|/\omega$ [秒] 遅らせた波形である**」

といいます。なお、グラフが時間 t [秒] を変数とする関数であることに注意しましょう[7]。位相を考えるときは、円周上を回転する点を思い浮かべるとよいでしょう。

[7] グラフだけ見てしまうと波が遅れている (または進んでいる) ように感じられますが、それは逆です。