

1.3 直交座標表示と極座標表示

平面 (x - y 平面) と複素平面⁸を自然に対応させると、図 1.8 のように、平面上の任意の点 P の座標 (x, y) は、複素平面上の座標

$$z = x + iy$$

に対応し、複素数で表されます。ただし、 $i (= \sqrt{-1})$ は虚数単位を表し、 $i^2 = -1$ を満たします⁹。このような表示方法を直交座標表示と呼びます。さらに、複素数 (複素平面上の座標) $z = x + iy$ に対して、 x を実部 (Real part)、 y を虚部 (Imaginary part) と呼び、それぞれ、

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{と} \quad y = \operatorname{Im} z$$

で表します。また、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\bar{z}$ は、

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

で定義され、実部 ($x = \operatorname{Re} z$) と虚部 ($y = \operatorname{Im} z$) は、それぞれ、

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{と} \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

となります。

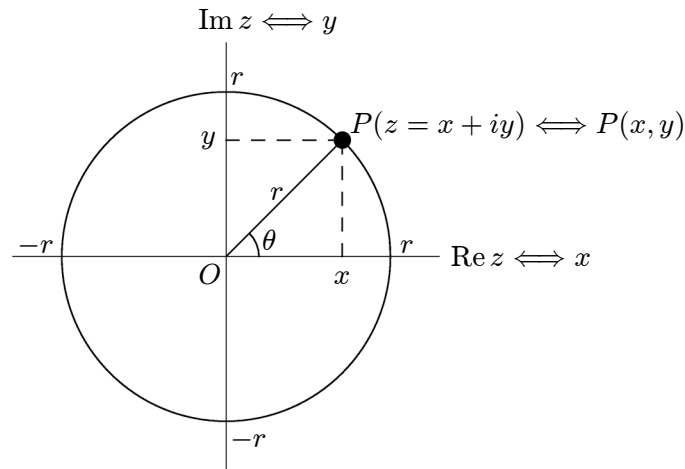


図 1.8: 直交座標表示と極座標表示

ここで、図 1.8 のように原点 O を中心として点 $P(z)$ を通る円を描くと、原点 O から点 P までの距離 r は、

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z} \quad \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

⁸ガウス (Gauss) 平面とも呼ばれます。

⁹フーリエ変換を取り扱った工学書では、 i は総計 (合計) などの変数として使われるため、 j が虚数単位に使用されます。

を計算することで得られます。また、図 1.8 のように実軸 (横軸) と直線 OP の成す角を θ [rad] とおくと、成す角 θ [rad] は偏角 (argument) と呼ばれ、

$$\theta = \arg z \quad \left(\text{または } \theta = \arctan \frac{y}{x} \right)$$

を計算することで得られます (これらの計算方法については、後ほど具体例を挙げて詳しく説明します)。このとき、実部 x と虚部 y が、

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos \theta \quad \text{と} \quad y = \operatorname{Im} z = r \sin \theta$$

となることに注意すれば、点 P の座標 $z = x + iy$ は、

$$\begin{aligned} z = x + iy &= (r \cos \theta) + i(r \sin \theta) \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

と書き直すことができます。このような表示方法を (三角関数による) 極座標表示と呼びます。さらに付け加えておくと、上記の式の θ を $-\theta$ で置き換えたものは、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ となります。なぜなら、三角関数の対称性によって、

$$\begin{aligned} \bar{z} = x - iy &= (r \cos \theta) - i(r \sin \theta) \\ &= r(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= r((\cos \theta) + i(-\sin \theta)) \\ &= r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

となるからです (図 1.8 から容易に読み取れます)。

さて、微積分で学んだ関数 $f(x)$ のテイラー (Taylor) 展開は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \cdots \end{aligned}$$

でしたから、 $a = 0$ において、指数関数¹⁰ (exponential) e^x , 正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$ のテイラー展開を求めると

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \end{array} \right.$$

¹⁰自然対数の底 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \cdots$ の指数関数 e^x は、 $\exp x$ とも記述されます。また、 e はネピアの数とも呼ばれます。

となります。ここで、テイラー展開された指数関数 e^x に対して、両辺の x を ix で置き換えると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - i\frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

という関係式が得られます。これが、有名な**オイラー (Euler) の公式**「 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 」です。したがって、(三角関数による) 極座標表示された点 P の座標 (複素数) $z = x + iy$ は、オイラーの公式を用いて、

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

と書き直すことができます。同様に、複素数 $z = x + iy$ の共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ は、複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の θ を $-\theta$ で置き換えた式と一致することに注意すれば、

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = re^{i(-\theta)} = re^{-i\theta}$$

と書き直すことができます。したがって、実部 x と虚部 y は

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} = r \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & (= r \cos \theta), \\ y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} = r \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & (= r \sin \theta) \end{cases}$$

となります。以上より、三角関数と指数関数の重要な関係

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

が得られます。なお、極座標表示において、前者

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

のような表示方法を「三角関数による極座標表示」と呼び、後者

$$z = re^{i\theta}$$

のような表示方法を「指数関数による極座標表示」と呼ぶことにします。

その他にも、極座標表示では次のことが成り立ちます。まず、三角関数による極座標表示で iz を計算すると、

$$\begin{aligned} iz &= ir(\cos \theta + i \sin \theta) = r(i \cos \theta + i^2 \sin \theta) \\ &= r(i \cos \theta - \sin \theta) = r(-\sin \theta + i \cos \theta) \\ &= r \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (\because \text{定理 1.2}) \end{aligned}$$

となり、 iz は点 $P(z)$ から位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 進んだ点の座標であることがわかります。同様に、 $-iz$ を計算すると、

$$\begin{aligned} -iz &= -ir(\cos \theta + i \sin \theta) = r(-i \cos \theta + (-i^2) \sin \theta) \\ &= r(i(-\cos \theta) + \sin \theta) = r(\sin \theta + i(-\cos \theta)) \\ &= r \left(\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (\because \text{定理 1.2}) \end{aligned}$$

となり、 $-iz$ は点 $P(z)$ から位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れた点の座標であることがわかります。すなわち、 i を掛けることで位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 進み、 $-i$ を掛けることで位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れます。このことは、指数関数による極座標表示についても同じことが言えるので、

$$iz = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} (re^{i\theta}) \quad \text{と} \quad -iz = re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}} (re^{i\theta})$$

が成り立ち、関係式

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{と} \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

が得られます。これは、単位円周上 ($r = 1$) の座標 $1 + i0 = 1$ ($\theta = 0$ [rad]) に対して、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 進ませた座標が $0 + i1 = i$ で、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせた座標が $0 - i1 = -i$ であることを意味しています。したがって、実部 x と虚部 y は

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (re^{i\theta}) = \operatorname{Im} (i re^{i\theta}), \\ y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} (re^{i\theta}) = \operatorname{Re} (-i re^{i\theta}) \end{cases}$$

と表すことができます。すなわち、波の世界に戻れば、 $\cos$ 波形の関数 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ と $\sin$ 波形の関数 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ は円周上を回る点の実軸 (横軸) と虚軸 (縦軸) への射影でしたから、指数関数による極座標表示 $re^{i\theta}$ を用いて

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} (Ae^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Im} (iAe^{i(\omega t + \phi)}), \\ x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = \operatorname{Im} (Ae^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Re} (-iAe^{i(\omega t + \phi)}) \end{cases}$$

と表されます。ただし、 r は A で、 θ は $\omega t + \phi$ で、それぞれ置き換えてあります。

以後、円周上を回る点の実軸（横軸）への射影を信号値 $x(t)$ とし、Re を省略して、指数関数による極座標表示を用いた cos 波形の関数を

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A e^{i(\omega t + \phi)}$$

と記述し、sin 波形の関数を

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = -i A e^{i(\omega t + \phi)}$$

と記述します¹¹。sin 波形の関数は、cos 波形の関数の位相が $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅れた関数として扱うことに注意しましょう。

話を元に戻して、先ほど求めた重要な関係式

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{cases}$$

が持つ意味について考察しておきましょう。まず、 $\cos \theta$ の式を

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} e^{i(-\theta)}$$

と変形し、 $\frac{1}{2} e^{i\theta}$ と $\frac{1}{2} e^{i(-\theta)}$ を複素平面上の 2 つのベクトルと考えます。この 2 つのベクトルの合成ベクトルの座標は、図 1.10 のように実軸上の座標となり、 $\cos \theta$ の値と一致します。言い換えれば、これまでは図 1.9 のように円周上を回転する点の実軸への像として $\cos \theta$ の値を表したのに対して、 $\frac{1}{2} e^{i\theta}$ と $\frac{1}{2} e^{i(-\theta)}$ の 2 つのベクトルの合成ベクトルは、実軸上を振動する点となり、点の座標（数式）そのもので $\cos \theta$ の値を表すことができます。

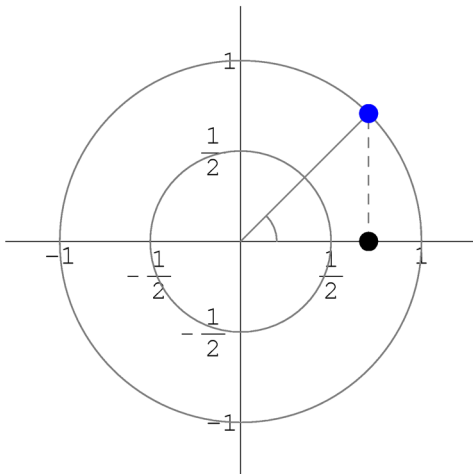


図 1.9: 像として $(\cos \theta)$

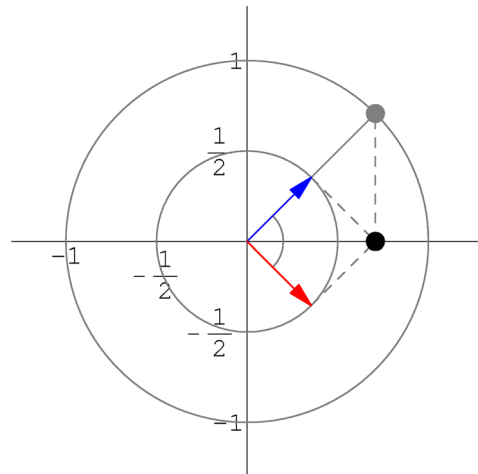


図 1.10: 合成ベクトルとして $(\cos \theta)$

¹¹フーリエ変換を扱った他の書籍でも標準的に用いられている表記方法なので、この表記方法に慣れてください。

同様に、 $\sin \theta$ の式を

$$\sin \theta = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = -i \left(\frac{1}{2} e^{i\theta} + \left(-\frac{1}{2} e^{i(-\theta)} \right) \right)$$

と変形し、 $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ と $-\frac{1}{2}e^{i(-\theta)}$ を複素平面上の2つのベクトルと考えます。この2つのベクトルの合成ベクトルの座標は、図 1.12 のように虚軸上の座標となります。ここで、 $-i$ を掛けることが位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせることに注意すれば、残しておいた $-i$ を掛けることによって実軸上の座標となり、 $\sin \theta$ の値と一致します (虚数 $0 + iy$ に対して実数 $-i \cdot (0 + iy) = 1 \cdot y = y$ となります)。すなわち、 $\cos \theta$ の場合と同様に、これまでは図 1.11 のように円周上を回転する点の虚軸への像として $\sin \theta$ の値を表したのに対して、 $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ と $-\frac{1}{2}e^{i(-\theta)}$ の2つのベクトルの合成ベクトルは、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] 遅らせることで、実軸上を振動する点となり、点の座標 (数式) そのもので $\sin \theta$ の値を表すことができます。このように、 $\cos$ 波形の関数や $\sin$ 波形の関数を2つのベクトルの合成ベクトルとして考えることは、2.2 節の複素フーリエ級数やその後の複素フーリエ展開を学ぶ上で非常に重要な役割を果たします。

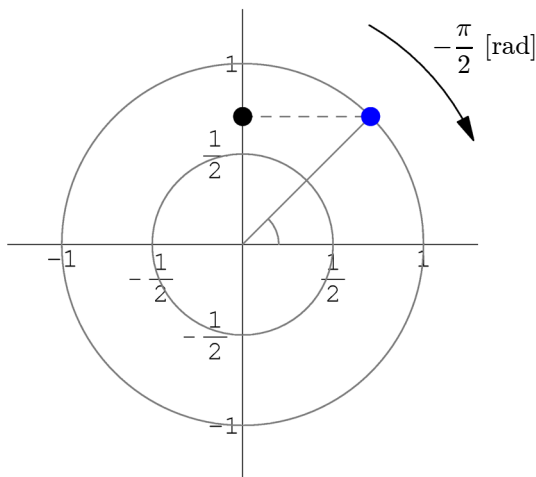


図 1.11: 像として ($\sin \theta$)

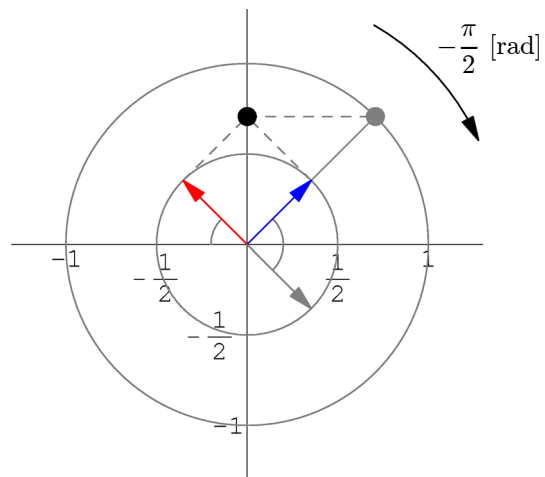


図 1.12: 合成ベクトルとして ($\sin \theta$)

この節の最後に、具体例を挙げ、実際に直交座標表示・三角関数による極座標表示・指数関数による極座標表示の相互変換と四則演算の練習をしておきましょう。これは、第4章で学ぶ離散フーリエ変換¹²の計算を行う上で重要となります (これを知らないと、計算が大変です)。例として、平面 (複素平面) 上の2点

$$P(2, 2) \quad (= P(x_1, y_1)) \quad \text{と} \quad Q(-1, \sqrt{3}) \quad (= Q(x_2, y_2))$$

について相互変換と四則演算を行なってみましょう (図 1.13 参照)。

¹²離散的な数値列を波と解釈してフーリエ変換を行ないます。そのため、コンピュータ上でフーリエ変換を計算させることに適した方法です。

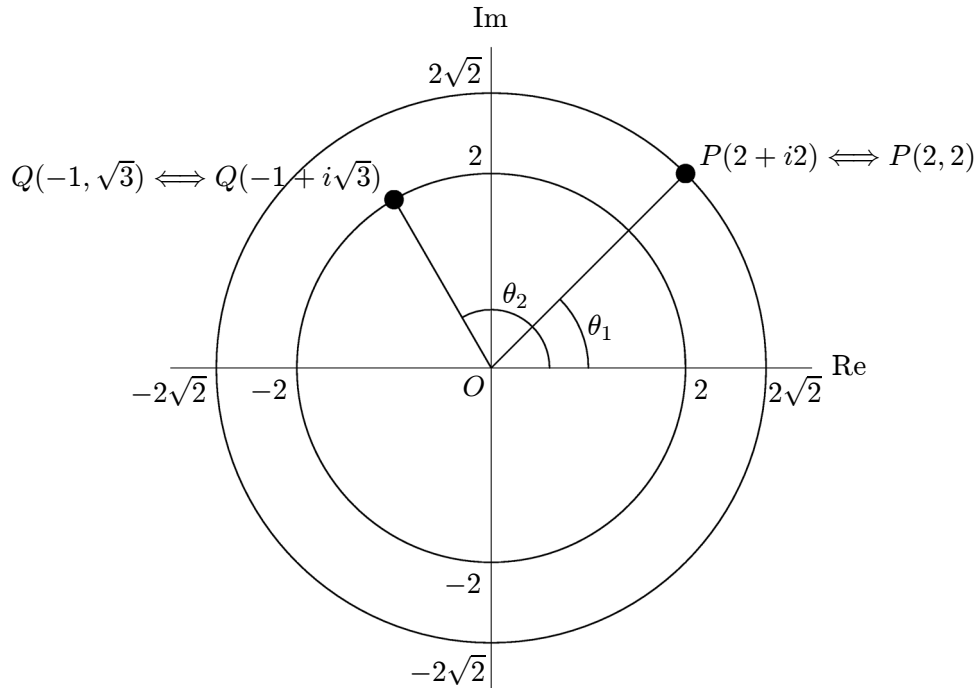


図 1.13: 直交座標表示と極座標表示の相互変換

まず、点 P と点 Q を直交座標表示すると

$$2 + i2 \quad (= z_1) \quad \text{と} \quad -1 + i\sqrt{3} \quad (= z_2)$$

と表されます (虚部であることを明示するために i を先に書きます)。また、図 1.13 のように原点 O を中心として点 P を通る円を描けば、半径 $r_1 = |z_1|$ は $\sqrt{(2 + i2)(2 - i2)} = 2\sqrt{2} (= r_1)$ となり、偏角 θ_1 は $\arg(2 + i2) = \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4} (= \theta_1)$ となります。よって、点 P の三角関数による極座標表示は

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \left(= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 + i2 \right)$$

となります。同様に、図 1.13 のように原点 O を中心として点 Q を通る円を描けば、半径 $r_2 = |z_2|$ は $\sqrt{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = 2 (= r_2)$ となり、偏角 θ_2 は $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \pi + \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3} (= \theta_2)$ となります。よって、点 Q の三角関数による極座標表示は

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad \left(= 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3} \right)$$

となります。さらに、点 P と点 Q について指数関数による極座標表示を行なえば

$$z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{と} \quad z_2 = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

となります。

【注意】本テキストでは、複素平面上的座標 $z = x + iy$ で表される点 $P(z)$ の偏角 (argument) θ [rad] を求めるにあたって、主に工学系の書籍で用いられる

$$\theta = \arg z \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

を使用します。なぜなら、普通の数学書では、逆正接関数 $\arctan$ は、平面上の任意の点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) に対して $\tan \theta = \frac{y}{x}$ を満たす角 θ [rad] $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を返す関数として定義されているためです。この定義だと点 $P(x, y)$ が第2象限と第3象限にある場合には正しい角を得ることができませんし、 $x = 0$ となるような点 $P(0, y)$ では角を得ることさえできません。これに対して、 $\arg z$ によって得られる角 θ [rad] は、第2象限にある場合は $\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}$ を返し、第3象限にある場合は $\theta = -\pi + \arctan \frac{y}{x}$ を返します。また、 $x = 0$ のときには、 $y > 0$ であれば $\frac{\pi}{2}$ を返し、 $y < 0$ であれば $-\frac{\pi}{2}$ を返します。なお、数式処理ソフト Mathematica の関数 **ArcTan**[x,y] は、点がどの象限にあるかを考慮して値を返すので、関数 **Arg**[z] と同じ値を返します。

四則演算の加法と減法については、直交座標表示を用いると容易に計算することができます。

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\ &= (2 + i2) + (-1 + i\sqrt{3}) = 2 - 1 + i(2 + \sqrt{3}) = 1 + i(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \\ &= (2 + i2) - (-1 + i\sqrt{3}) = 2 + 1 + i(2 - \sqrt{3}) = 3 + i(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

あとは、必要に応じて極座標表示を行ないます (極座標表示で計算するのは大変です)。

$$\text{参考 : } \arg(1 + i(2 + \sqrt{3})) = \frac{5\pi}{12}, \quad \arg(3 - i(2 - \sqrt{3})) = \arctan \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \doteq 0.08908.$$

また、残りの乗法と除法については、極座標表示を用いると容易に計算することができます。三角関数による極座標表示を用いた乗法と除法の計算は以下のようになります。

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= \left(2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
&= \left(2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right) / \left(2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).
\end{aligned}$$

指数関数による極座標表示を用いた乗法と除法は、もっと直接的に計算することができ、以下のようになります。

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \left(2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \\
&= 4\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi}{3}} \\
&= 4\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \left(2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) / \left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
&= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{2\pi}{3}} \\
&= \sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

ちなみに、直交座標表示で計算すると以下のようになります。

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i2) \cdot (-1 + i\sqrt{3}) = -2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3}).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i2}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}.$$

もちろん、これらの点を極座標表示すると上記のようになります。

$$\text{参考 : } \arg(-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})) = \frac{11\pi}{12}, \quad \arg\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\pi}{12}.$$

(メモ用紙)