

第3章 フーリエ変換

3.1 フーリエ積分とフーリエ変換

第2章では、周期を持つ関数のフーリエ級数について学びました。この章では、最初に、周期を持つ関数のフーリエ級数を拡張し、周期を持たない(一般的な)関数のフーリエ級数を導きましょう。具体的には、関数 $f(x)$ を区間 $-L \leq x \leq L$ で考え、この L を限りなく大きくするというアプローチを取ります ($L \rightarrow \infty$)。なお、ここで扱う関数 $f(x)$ は、 $(-\infty, \infty)$ で定義されていて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

を満足しているとします(もちろん、区分的に連続かつ区分的になめらかとします)。

まず、関数 $f(x)$ を周期 $2L$ を持つ関数と考え、区間 $-L \leq x \leq L$ でフーリエ級数展開すると、関数 $f(x)$ のフーリエ級数とフーリエ係数は、それぞれ、

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right),$$
$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{k\pi}{L} t dt & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{k\pi}{L} t dt & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

となります。ここで、 $L \rightarrow \infty$ を考えることにします。 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$ に注意すれば、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} |a_0| = \lim_{L \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \right| \leq \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M}{L} = 0$$

となり、 $a_0 = 0$ が得られます。さらに、 $\frac{\pi}{L} = \Delta u$ とおき、 $L \rightarrow \infty$ ($\Delta u \rightarrow 0$) を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \right) \cos \frac{n\pi}{L} x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta u}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta u}}^{\frac{\pi}{\Delta u}} f(t) \cos n\Delta u t dt \right) \cos n\Delta u x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos n\Delta u t dt \right) \cos n\Delta u x \right) \Delta u \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt \right) \cos ux du \quad (\because \text{区分求積法}) \end{aligned}$$

が得られます。同様に、

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta u}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta u}}^{\frac{\pi}{\Delta u}} f(t) \sin n\Delta u t dt \right) \sin n\Delta u x \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin n\Delta u t dt \right) \sin n\Delta u x \right) \Delta u \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \right) \sin ux du \quad (\because \text{区分求積法}) \end{aligned}$$

が得られます。したがって、周期を持たない関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (フーリエ積分) は次の定理によって与えられます。

定理 3.1 周期を持たない関数 $f(x)$ の (三角関数による) フーリエ級数は、

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} A(u) \cos ux du + \int_0^{\infty} B(u) \sin ux du \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ただし、

$$\begin{cases} A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt, \\ B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

とする¹。なお、①式を関数 $f(x)$ の (三角関数による) フーリエ積分と呼ぶ。

続けて、①式を変形すると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^{\infty} (A(u) \cos ux + B(u) \sin ux) du \\ &= \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt \right) \cos ux + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \right) \sin ux \right) du \end{aligned}$$

¹ $A(u)$ と $B(u)$ は、周期を持つ関数をフーリエ級数展開した際に得られるフーリエ係数 a_n と b_n に相当します。

となり、さらに変形を続けると、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) (\cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux) dt \right) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(x-t)u dt du \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\cos \theta = \cos(-\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

に注意すると、①式は、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{e^{i(x-t)u} + e^{-i(x-t)u}}{2} dt du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i(x-t)u} dt du + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)u} dt du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)v} dt dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)u} dt du \\ &\quad (\because u = -v \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-i(x-t)u} dt du \quad (\because v \text{ を } u \text{ とおき直す}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} dt \right) e^{iux} du \end{aligned}$$

と書き換えられます。したがって、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} dt$$

とおくと、次の定理が得られます (三角関数によるフーリエ積分を指数関数で表現し直した数式)。

定理 3.2 関数 $f(x)$ の (指数関数による) フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(u) e^{iux} du \quad \dots \textcircled{1}'$$

である。ただし、

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iut} dt \quad \dots \textcircled{2}'$$

とする²。なお、②' 式を関数 $f(x)$ の **フーリエ変換** (Fourier transform) と呼ぶ。

また、①' 式と ②' 式の積分の形が対称的によく似ていることと、②' 式では関数 $f(x)$ を積分して関数 $F(u)$ が得られるのに対して ①' 式では関数 $F(u)$ を積分して関数 $f(x)$ が得られることから、①' 式 (フーリエ積分) を関数 $f(x)$ の **逆フーリエ変換** または **反転公式** と呼びます。

² $F(u)$ は、周期を持つ関数を複素フーリエ級数展開した際に得られる複素フーリエ係数 c_n に相当します。

これまで見てきたように、フーリエ積分 (逆フーリエ変換) およびフーリエ変換の表記方法には、三角関数による表現と指数関数による表現があります。以後、本テキストでは、基本的に、表現のシンプルな指数関数による表現で記述することにします (一般的な書籍も指数関数による表現が標準となっています)。ただし、三角関数による表現の方がシンプルな場合は、三角関数による表現で記述します。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を使って、互いに変換できるようにしておきましょう (p.15 参照)。

例として、区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めてみましょう。定理より、関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 1 \cdot e^{-iut} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-iu} e^{-iut} \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u} \end{aligned}$$

となります。ここで、関数 $F(u)$ を調べるために、三角関数による表現に直すと、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(\cos(-u) + i \sin(-u) - 1)}{u} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos u - 1}{u} \end{aligned}$$

となります。 u を変数として、関数 $F(u)$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$ および虚部 $\operatorname{Im} F(u)$ のグラフを描くと図 3.1 のようになります。

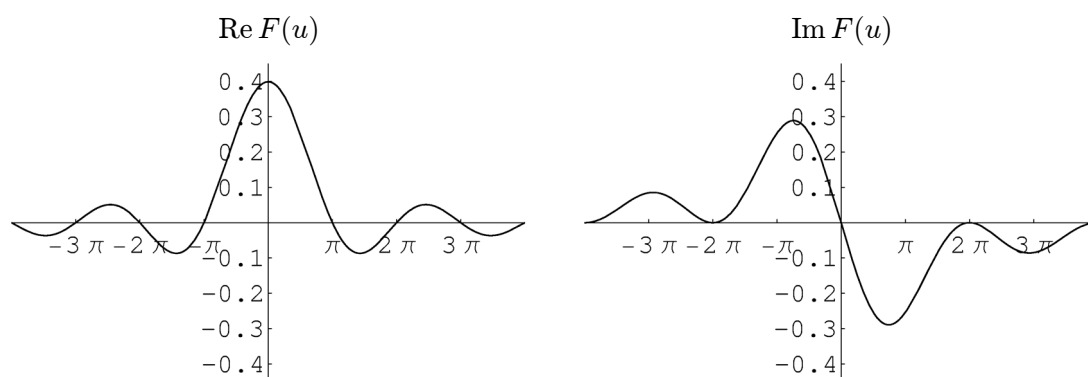


図 3.1: 関数 $F(u)$ の実部および虚部のグラフ

また、関数 $F(u)$ を波として捉えると、振幅の絶対値 $|F(u)|$ は、

$$\begin{aligned} |F(u)|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos u - 1}{u} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin^2 u + \cos^2 u - 2\cos u + 1}{u^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2 - 2\cos u}{u^2} = \frac{2}{\pi u^2} \cdot \frac{1 - \cos u}{2} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\ &= \frac{2}{\pi u^2} \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2} \right) = \frac{2}{\pi u^2} \sin^2 \frac{u}{2} \quad (\because \text{半角の公式}) \end{aligned}$$

より、

$$|F(u)| = \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{u}{2}}{u} \right|$$

となり、偏角 θ は、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos u - 1}{u} \right) \bigg/ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \right) = \left(-\frac{1 - \cos u}{2} \right) \bigg/ \left(\frac{\sin u}{2} \right) \\ &= \left(-\sin^2 \frac{u}{2} \right) \bigg/ \left(\sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \right) \quad (\because \text{半角の公式}) \\ &= -\tan \frac{u}{2} = \tan \left(-\frac{u}{2} \right) \end{aligned}$$

より、区間 $2n\pi \leq u < 2(n+1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) において、

$$\theta = -\frac{u}{2} + n\pi$$

となります³。 u を変数として、関数 $F(u)$ の振幅の絶対値 $|F(u)|$ および偏角 θ のグラフを描くと図 3.2 のようになります。

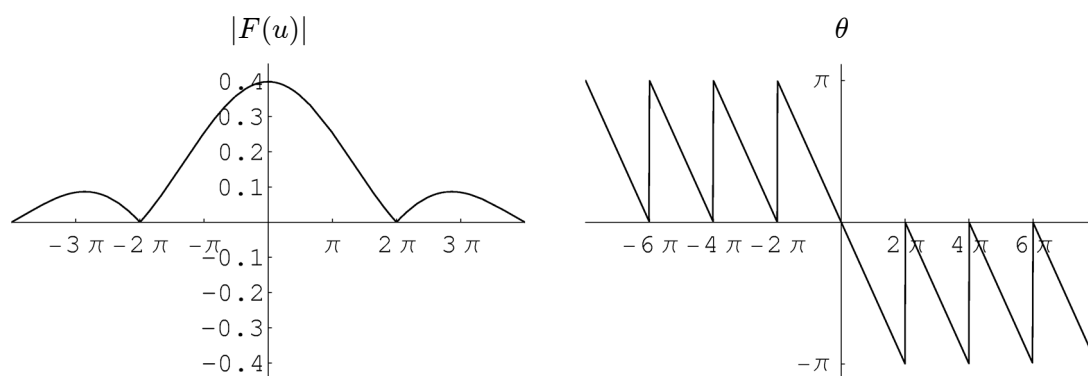


図 3.2: 関数 $F(u)$ の振幅および偏角のグラフ

このような考察は、フーリエ変換を用いて波を解析する上で非常に重要となります。これからも、ここに描かれたグラフによく似たグラフがたくさん現れるので注目するようにしましょう。

³図 3.2 の偏角 θ のグラフの線はつながっていますが、実際には、点 $u = 2n\pi$ における θ の値は 0 となります。

フーリエ級数の場合と同様に、関数が偶関数の場合と奇関数の場合のフーリエ積分を求めると、以下の系が得られます。

系 3.3 偶関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(u) \cos ux \, du$$

である。ただし、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt$$

とする。なお、 $C(u)$ を **フーリエ余弦変換** と呼ぶ。

証明 定理 3.1 より、フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du$$

である。ここで、関数 $f(x)$ が偶関数 ($f(-x) = f(x)$) であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \cos ut \, dt + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= \int_{\infty}^0 f(-s) \cos u(-s) (-ds) + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \int_0^\infty f(-s) \cos(-us) \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= \int_0^\infty f(s) \cos us \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \quad (\because \cos ux \text{ は偶関数}) \\ &= 2 \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \sin ut \, dt + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \\ &= \int_{\infty}^0 f(-s) \sin u(-s) (-ds) + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \\ &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \int_0^\infty f(-s) \sin(-us) \, ds + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \\ &= - \int_0^\infty f(s) \sin us \, ds + \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt \quad (\because \sin ux \text{ は奇関数}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt$$

とおけば、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(u) \cos ux \, du$$

が得られ、証明が完了する。 ■

系 3.4 奇関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(u) \sin ux \, du$$

である。ただし、

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt$$

とする。なお、 $S(u)$ を **フーリエ正弦変換** と呼ぶ。

証明 偶関数と同様に証明する。定理 3.1 より、フーリエ積分は、

$$f(x) \sim \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt \right) \cos ux \, du + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du$$

である。ここで、関数 $f(x)$ が奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \cos ut \, dt + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= \int_\infty^0 f(-s) \cos u(-s) (-ds) + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\ &= \int_0^\infty f(-s) \cos(-us) \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &= - \int_0^\infty f(s) \cos us \, ds + \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt \quad (\because \cos ux \text{ は偶関数}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) \sin ut \, dt + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
 &= \int_{\infty}^0 f(-s) \sin u(-s) (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
 &\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
 &= \int_0^{\infty} f(-s) \sin(-us) \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(s) \sin us \, ds + \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \quad (\because \sin ux \text{ は奇関数}) \\
 &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt \right) \sin ux \, du
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt$$

とおけば、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(u) \sin ux \, du$$

が得られ、証明が完了する。 ■

また、次のような系も得られます⁴。

系 3.5

- (1) 関数 $f(x)$ が偶関数ならば、 $C(u) = F(u)$ が成り立つ。
- (2) 関数 $f(x)$ が奇関数ならば、 $S(u) = iF(u)$ が成り立つ。

⁴関数 $F(u)$ を実部 ($\cos$ 波形) と虚部 ($\sin$ 波形) のベクトルで構成された波として捕らえれば、 $F(u)$ に i を掛けることは、各ベクトルの位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ進ませることに他なりません。したがって、 $F(u)$ が実部のみからなるベクトルの場合は、それ自身が実軸への像となり、 $C(u)$ に一致します。一方、 $F(u)$ が虚部のみからなるベクトルの場合は、位相を $\frac{\pi}{2}$ [rad] だけ進ませ、これが実軸への像となり、 $S(u)$ に一致します。

証明 (1) を証明する。

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\infty}^0 f(-s) e^{-iu(-s)} (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(s) e^{ius} ds + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \quad (\because f(-x) = f(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) (e^{iut} + e^{-iut}) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{e^{iut} + e^{-iut}}{2} dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt = C(u) \\
&\quad \therefore C(u) = F(u).
\end{aligned}$$

(2) を証明する。

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\infty}^0 f(-s) e^{-iu(-s)} (-ds) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&\quad (\because t = -s \text{ とおき、前項を変数変換}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} -f(s) e^{ius} ds + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \quad (\because f(-x) = -f(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} -f(t) e^{iut} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) (-e^{iut} + e^{-iut}) dt = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{e^{iut} - e^{-iut}}{2i} dt \\
&= -i \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt = -i \cdot S(u) \\
&\quad \therefore S(u) = iF(u).
\end{aligned}$$

■

定理 3.1・系 3.3・系 3.4 をまとめると下表のようになります。

	フーリエ積分	フーリエ変換
関数	$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du$	$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$
偶関数	$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux du$	$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos ux dx$
奇関数	$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(u) \sin ux du$	$S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin ux dx$

* フーリエ変換の数式は、 $t = x$ において変数変換した数式で、標準的な書き方です。

表 3.1: フーリエ積分 (逆フーリエ変換) とフーリエ変換

【注意】 フーリエ積分とフーリエ変換を求める数式は、書籍によって多少異なりますが、本質的には同じ数式です。ノルムの取り方と変数変換によって、いずれの数式にも書き換えることができ、各分野や各書籍に適した数式として表現されています。数式処理ソフト Mathematica では、以下のように定義されています。

$$\begin{cases} f(v) \sim \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ibuv} du & (\text{フーリエ積分}), \\ F(u) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{ibuv} dv & (\text{フーリエ変換}) \end{cases}$$

- $(a, b) = (0, 1)$: 標準, 現代物理学
- $(a, b) = (1, -1)$: 純粋数学, システム工学
- $(a, b) = (1, 1)$: 古典物理学
- $(a, b) = (0, -2\pi)$: 信号処理

例題 1 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

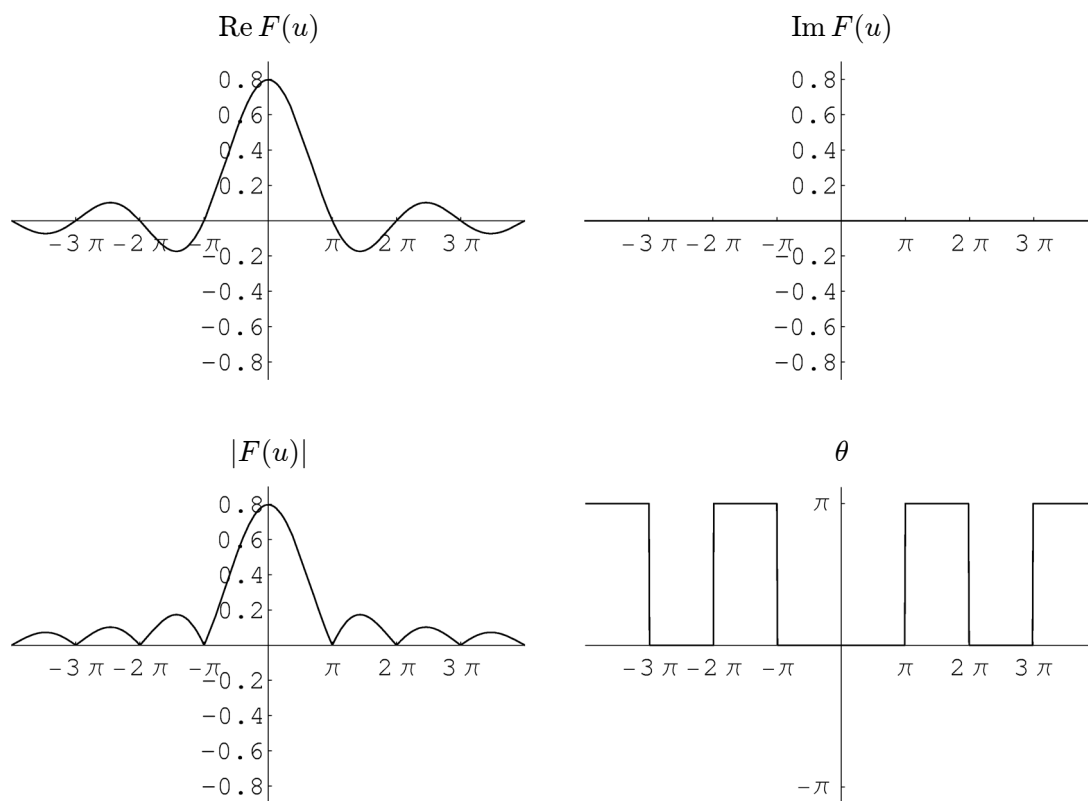
のフーリエ余弦変換を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$\begin{aligned} C(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \cos ut \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $F(u) (= C(u))$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$, 虚部 $\operatorname{Im} F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます ($\because$ 系 3.5 より $F(u) = C(u)$)。



例題 2 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -1), \\ -1 & (-1 < x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (0 < x < 1), \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

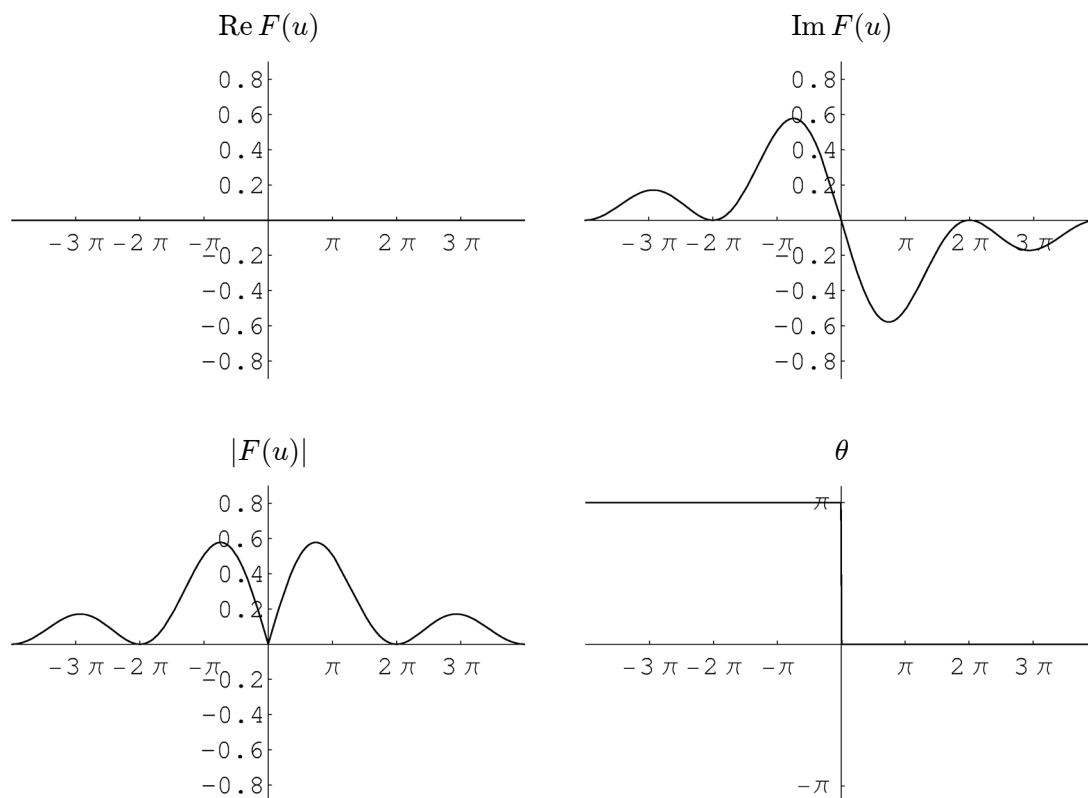
のフーリエ正弦変換を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換 $S(u)$ は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \sin ut \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{-\cos ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos u}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $F(u) (= -iS(u))$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$, 虚部 $\operatorname{Im} F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます ($\because$ 系 3.5 より $F(u) = -iS(u)$)。



例題 3 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 2), \\ 1 & (2 \leq x \leq 3), \\ 0 & (x > 3) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_2^3 1 \cdot e^{-iut} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iut}}{-iu} \right]_2^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i(e^{-i3u} - e^{-i2u})}{u} \end{aligned}$$

となる。

* 参考のため、関数 $F(u)$ の実部 $\operatorname{Re} F(u)$, 虚部 $\operatorname{Im} F(u)$, 振幅の絶対値 $|F(u)|$, 位相 θ のグラフをそれぞれ挙げておきます。

