

3.2 フーリエ積分の収束

フーリエ積分の収束についてもフーリエ級数の収束と同様に次の定理が成り立ちます。

定理 3.6 関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty, \infty)$ で区分的に連続かつ区分的になめらかで、さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$$

を満たしているとき、関数 $f(x)$ のフーリエ積分は、

- $f(x)$ が連続な点 x で $f(x)$ に収束し、
- $f(x)$ が不連続な点 x で $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ に収束

する。

証明 フーリエ級数の収束の場合とほとんど同じなので、証明は省略します。 ■

上の定理より、次の系が直ちに得られます。

系 3.7 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(u)$ とすると、等式

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du$$

が成り立つ。

ここで、関数 $f(x)$ をフーリエ変換 $F(u)$ し、さらに、逆フーリエ変換することを考えてみましょう。前節で挙げた例で試してみると、関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(u)$ は、

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u}$$

でしたから、逆フーリエ変換 $f(x)$ は、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u} \right) e^{iux} du$$

を解けばよいことがわかります。しかしながら、これを直接解くことは非常に困難です。ところが、定理 3.6 に注意すれば、フーリエ積分によって得られた $f(x)$ は、不連続な点以外では元の関

数 $f(x)$ に一致することから、不連続な点のみ系 3.7 を使って値を修正すれば、逆フーリエ変換 $f(x)$ を容易に得ることができます。具体的には、例の場合、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(e^{-iu} - 1)}{u} \right) e^{iux} du = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{1}{2} & (x = 0), \\ 1 & (0 < x < 1), \\ \frac{1}{2} & (x = 1), \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

とすればよいことがわかります ($\because \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$)。

例題 1 区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

のフーリエ余弦変換を利用して、定積分

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} du$$

の値を求めなさい。

解答例 関数 $f(x)$ のフーリエ余弦変換 $C(u)$ は、

$$\begin{aligned} C(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 1 \cdot \cos ut dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin ut}{u} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

であるから、逆フーリエ余弦変換 $f(x)$ は、

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} du$$

となる。したがって、系 3.7 より、以下のように定積分の値が求まる。

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u} du = \begin{cases} 1 & (|x| < 1), \\ \frac{1}{2} & (|x| = 1), \\ 0 & (|x| > 1). \end{cases}$$

例題 2 次の方程式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい。

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos xt \, dt = \begin{cases} 1-x & (0 \leq x \leq 1), \\ 0 & (x > 1). \end{cases}$$

解答例 関数 $f(x)$ を偶関数と考えると、

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-u) & (0 \leq u \leq 1), \\ 0 & (u > 1) \end{cases}$$

とおく (フーリエ余弦変換が与えられている)。このとき、逆フーリエ余弦変換は、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(u) \cos ux \, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-u) \right) \cos ux \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-u) \cos ux \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[(1-u) \frac{\sin ux}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \cdot \frac{\sin ux}{x} \, du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{x} \int_0^1 \sin ux \, du \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \left[\frac{-\cos ux}{x} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

となる。また、 $C(u)$ の不連続な全ての点 u で $C(u) = C(u+0) = C(u-0)$ が成り立ち、逆フーリエ余弦変換と求める関数 $f(x)$ は一致する。したがって、

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

となる。

* フーリエ積分 (逆フーリエ変換) とフーリエ変換は対称的な式であることから、フーリエ積分の収束と同様に、フーリエ変換の収束について

$$\frac{F(u+0) + F(u-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} \, dt$$

が成り立ちます (もちろん、同じ条件を与えた上で)。

例題 3 等式

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2} du = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

が成り立つことを証明しなさい。

解答例 奇関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

とする。このとき、関数 $f(x)$ のフーリエ正弦変換は、

$$\begin{aligned} S(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin t \sin ut \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} -\frac{1}{2} (\cos(t+ut) - \cos(t-ut)) \, dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\cos(1+u)t - \cos(1-u)t) \, dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(1+u)t}{1+u} - \frac{\sin(1-u)t}{1-u} \right]_0^{\pi} \\ &\quad \vdots \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi u}{1-u^2} \end{aligned}$$

となる。さらに、関数 $f(x)$ の逆フーリエ正弦変換を求めると、

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(u) \sin ux \, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \pi u}{1-u^2} \right) \sin ux \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2} du \end{aligned}$$

となる。また、 $f(x)$ の不連続な全ての点 x で $f(x) = f(x+0) = f(x-0)$ が成り立ち、逆フーリエ正弦変換と元の関数 $f(x)$ は一致する。ゆえに、等式

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi u \sin ux}{1-u^2} du = \begin{cases} \sin x & (|x| \leq \pi), \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$$

が成り立つ。 ■

3.3 波のフーリエ変換

この節では、波 (信号値; 観測値) $x(t)$ のフーリエ変換を導き、フーリエ変換の持つ意味や利点について考察しましょう。

まず、定理 3.2 のフーリエ積分およびフーリエ変換より、

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) e^{iux} du$$

でしたから、関数 $f(x)$ を波 $x(s)$ (変数 x も変数 s [秒] に書き換える) に置き換え、 u を角速度 ω [rad/秒] に書き換えて整頓すると、

$$x(s) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega s} d\omega$$

となります。ここで、角速度 ω [rad/秒] は、周波数 f [Hz] を使って、

$$\omega = 2\pi f \quad (d\omega = 2\pi df)$$

と表せたので、さらに与式を変数変換すると、

$$x(s) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right) e^{i2\pi fs} df$$

となります。したがって、

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

とおくと、波 $x(t)$ のフーリエ積分 (変数 s [秒] を変数 t [秒] に書き換える)

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

が得られます。以上をまとめると、**波のフーリエ積分**および**波のフーリエ変換**は、

$$x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (\text{波のフーリエ積分})$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{波のフーリエ変換})$$

となります。すなわち、この2つの式によって**時間領域** $x(t)$ と**周波数領域** $X(f)$ を自由に行き来することが可能となります。特に、波 $x(t)$ のフーリエ変換では、波 $x(t)$ の特徴を明確に捉えることを可能にします。具体的には、**波を構成する三角関数とその周波数 (角速度)・振幅・初期位相がわかります** (このあとに、例を使って示します)。なお、調べたい区間 (波の一部または全体) を積分区間としてフーリエ変換することで、調べたい区間の波の特徴を調べることができます。例えば、図 3.3 のように観測開始 ($t = 0$ [秒]) から観測終了 ($t = T'$ [秒]) までに波 $x(t)$ が得られたとすると、区間 $[0, T']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば観測区間全体の波の特徴を調べることができますし、 a [秒] から b [秒] までの区間を切り取り、区間 $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq T'$) を積分区間としてフーリエ変換すれば区間 $[a, b]$ の波の特徴を調べることができます ($T'' = b - a$)。ま

た、図 3.4 のような周期を持つ波の特徴を調べるには、1 周期 T''' [秒] 分、すなわち区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば周期を持つ波の特徴を調べることができます⁶。

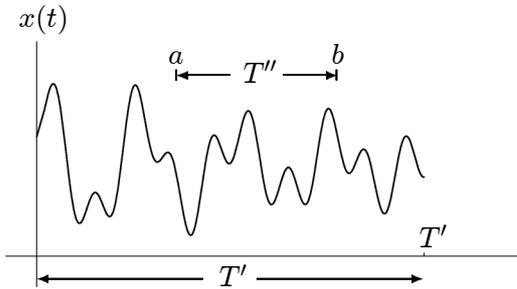


図 3.3: 一般的な波

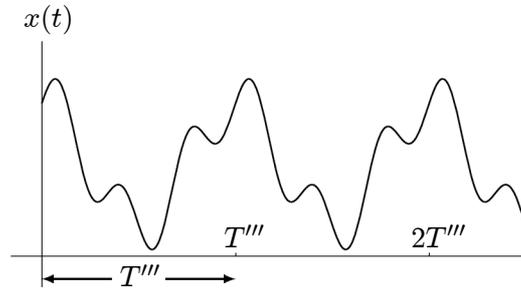


図 3.4: 周期を持つ波

ただし、ここで注意しておかなければならないことは、前記のように周期 T_0 [秒] (T' , T'' , T''' など) を持つ波 $x(t)$ として捉えたとき、区間 $[0, T_0]$ を積分区間としてフーリエ変換 $X(f)$ すると、各周波数ごとの振幅 (スペクトル⁷) は T_0 [秒] 間分を積算した振幅となってしまいます。そこで、新たに**周波数スペクトル密度**

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{周波数スペクトル密度})$$

を定義し、単位時間 (1 [秒]) あたりのスペクトルとして波の特徴を調べることにします⁸。

3.3.1 cos 波形の波のフーリエ変換

では、最も基本的な cos 波形の波

$$x(t) = A \cos 2\pi t$$

⁶周期を持つ波 $x(t)$ の場合、全区間を積分区間としてフーリエ変換すると無限大になり、まともに計算することができません。しかしながら、周期 T''' に限定し、区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換すれば、フーリエ変換の条件

$$\int_0^{T'''} |x(t)| dt = M < \infty$$

を満たし、有限の値が得られます。なお、周期を持つ波を区間 $[0, T''']$ を積分区間としてフーリエ変換し、波の特徴を調べ、三角関数で表すと、全区間に拡張された周期を持つ波として再現されます (フーリエ積分してしまうと元の 1 周期 T''' 分の波しか現れない)。実は、この再現された波 (周期関数) は、当然ではあるが、周期 T''' の周期関数をフーリエ級数展開して得られるフーリエ級数と一致します (元々、フーリエ級数を拡張したものがフーリエ積分であった)。逆に、前者を周期 T' または周期 T'' を持つ波として捉えて、フーリエ変換し、波の特徴を調べ、三角関数で表すと、それぞれ周期 T' または周期 T'' を持つ波として再現されます (時間領域の全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張される)。ただし、この場合の有効範囲 (区間) は、それぞれ区間 $[0, T']$ または区間 $[a, b]$ となります。

⁷フーリエ解析では、スペクトル (spectrum) は周波数ごとの振幅の大きさ指します。

⁸フーリエ積分する際は、元の $X(f)$ を使用します。

をフーリエ変換してみましょう。この波⁹は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 (A \cos 2\pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos u)e^{-ifu} du \quad (\because u = 2\pi t \text{ とおき、変数変換}) \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\cos u)e^{-ifu} du &= (\sin u)e^{-ifu} - \int (\sin u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \\ &= (\sin u)e^{-ifu} + if \int (\sin u)e^{-ifu} du \\ &= (\sin u)e^{-ifu} + if \left((-\cos u)e^{-ifu} - \int (-\cos u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \right) \\ &= (\sin u)e^{-ifu} + if \left((-\cos u)e^{-ifu} - if \int (\cos u)e^{-ifu} du \right) \\ &= (\sin u)e^{-ifu} - if(\cos u)e^{-ifu} - (if)^2 \int (\cos u)e^{-ifu} du \end{aligned}$$

より、

$$\int (\cos u)e^{-ifu} du = \frac{1}{1-f^2} \left((\sin u)e^{-ifu} - if(\cos u)e^{-ifu} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{1}{1-f^2} \left((\sin u)e^{-ifu} - if(\cos u)e^{-ifu} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{(0 - if e^{-i2\pi f}) - (0 - if)}{1-f^2} \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1-f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1-f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.5 のようになります。

⁹この波を特徴付けるパラメータは、振幅 A 、角速度 $\omega = 2\pi$ [rad/秒]、初期位相 $\phi = 0$ [rad]、周期 $T_0 = 1$ [秒]、周波数 $f_0 = 1/T_0 = 1$ [Hz] となっています。併せて、以下の関係式を復習しておきましょう。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}.$$

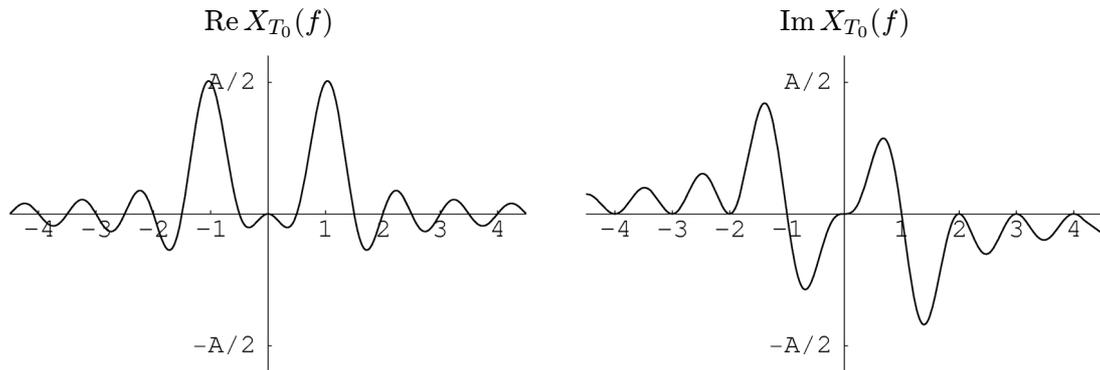


図 3.5: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = A \cos 2\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 1 を除く $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 1) = \pm 2\pi$ [rad/秒] の \cos 波形の波から構成されていることを表しています (\cos 波形の波は $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフに現れる)。なお、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の値は、 $X_{T_0}(f)$ の極限が $\frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{i(1 - e^{-i2\pi f}) + if(-(-i2\pi)e^{-i2\pi f})}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \frac{A}{2} \quad \leftarrow \text{極座標表示による } \cos \text{ 波形の波は実部のみ} \end{aligned}$$

となります。したがって、 \cos 波形の波が初期位相 0 [rad] であることに注意し、

$$A \cos \theta = A \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{A}{2} e^{i\theta} + \frac{A}{2} e^{i(-\theta)} \quad (\theta = 0 \text{ とする})$$

と考えれば (\cos 波形の波の振幅を求める公式: $\text{Re } X_{T_0}(f) + \text{Re } X_{T_0}(-f)$)、

$$\text{Re } X_{T_0}(1) + \text{Re } X_{T_0}(-1) = \text{Re} \left(\frac{A}{2} \right) + \text{Re} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$$

が振幅となります。以上より、元の関数

$$x(t) = A \cos 2\pi t$$

が導き出されます¹⁰。

¹⁰ここでは、初期位相について何も触れていませんが、この後の初期位相を持つ波のフーリエ変換で詳しく述べることにします。また、このような考察は、実は、周期 1 [秒] を持つ波 $x(t)$ のフーリエ級数を求めていることに他なりません。事実、フーリエ係数 $a_2 = A$ かつそれ以外のフーリエ係数が 0 となるフーリエ級数となっています。なお、波 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ をフーリエ積分してしまうと 1 周期分の \cos 波形の波しか現れないことに注意しましょう。

3.3.2 sin 波形の波のフーリエ変換

続いて、cos 波形の波のフーリエ変換に習って、最も基本的な sin 波形の波

$$x(t) = B \sin 2\pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。この波は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^1 (B \sin 2\pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin u)e^{-ifu} du \quad (\because u = 2\pi t \text{ とおき、変数変換}) \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\sin u)e^{-ifu} du &= (-\cos u)e^{-ifu} - \int (-\cos u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if \int (\cos u)e^{-ifu} du \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if \left((\sin u)e^{-ifu} - \int (\sin u) \cdot (-if)e^{-ifu} du \right) \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if \left((\sin u)e^{-ifu} + if \int (\sin u)e^{-ifu} du \right) \\ &= (-\cos u)e^{-ifu} - if(\sin u)e^{-ifu} - (if)^2 \int (\sin u)e^{-ifu} du \end{aligned}$$

より、

$$\int (\sin u)e^{-ifu} du = \frac{1}{1-f^2} \left((-\cos u)e^{-ifu} - if(\sin u)e^{-ifu} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{B}{2\pi} \left[\frac{1}{1-f^2} \left((-\cos u)e^{-ifu} - if(\sin u)e^{-ifu} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{(-e^{-i2\pi f} + 0) - (-1 + 0)}{1-f^2} \\ &= \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1-f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{1} = X(f) = \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1-f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.6 のようになります。

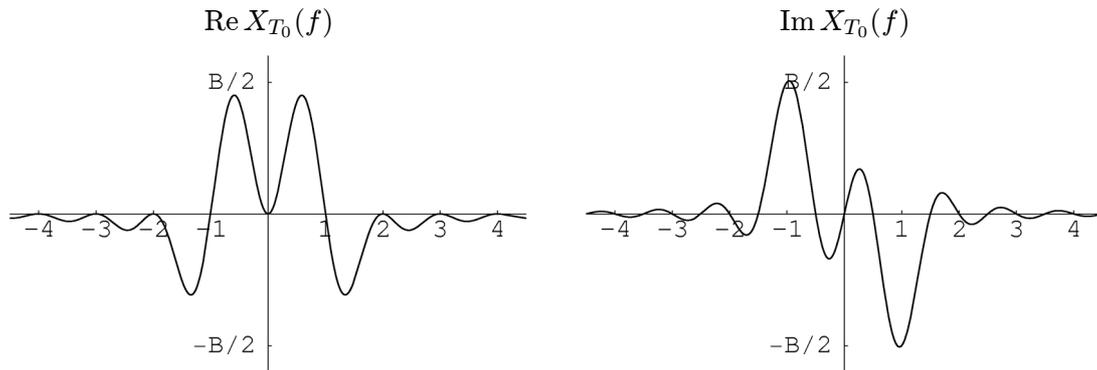


図 3.6: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = B \sin 2\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 1 を除く $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 1) = \pm 2\pi$ [rad/秒] の \sin 波形の波から構成されていることを表しています (\sin 波形の波は $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフに現れる)。なお、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の値は、 $X_{T_0}(f)$ の極限が $\frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \frac{B}{2\pi} \cdot \frac{-(-i2\pi)e^{-i2\pi f}}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \mp i \frac{B}{2} \quad (\text{符号同順}) \quad \leftarrow \text{極座標表示による } \sin \text{ 波形の波は虚部のみ} \end{aligned}$$

となります。したがって、 \sin 波形の波が初期位相 $-\frac{\pi}{2}$ [rad] であることに注意し、

$$B \sin \theta = B \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -i \frac{B}{2} e^{i\theta} + i \frac{B}{2} e^{i(-\theta)} \quad (\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ とする})$$

と考えれば (\sin 波形の波の振幅を求める公式: $-\text{Im } X_{T_0}(f) + \text{Im } X_{T_0}(-f)$)、

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -\text{Im} \left(-i \frac{B}{2} \right) + \text{Im} \left(i \frac{B}{2} \right) = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = B$$

が振幅となります。以上より、元の関数

$$x(t) = B \sin 2\pi t$$

が導き出されます¹¹。

¹¹ここでも、初期位相について何も触れていませんが、この後の初期位相を持つ波のフーリエ変換で詳しく述べることにします。また、 \cos 波形の波のフーリエ変換と同様に、このような考察は、周期 1 [秒] を持つ波 $x(t)$ のフーリエ級数を求めていることに他なりません。事実、フーリエ係数 $b_2 = B$ かつそれ以外のフーリエ係数が 0 となるフーリエ級数となっています。同じことですが、波 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ をフーリエ積分してしまうと 1 周期分の \sin 波形の波しか現れないことに再び注意しましょう。