

3.3.3 周期 T_0 を持つ波のフーリエ変換

これまでの波は、周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波でしたが、周期を変えた波のフーリエ変換では、どのような違いがあるのか検証しましょう。例えば、周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos \pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。この波を区間 $[0, 2]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^2 (\cos \pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.7 のようになります。

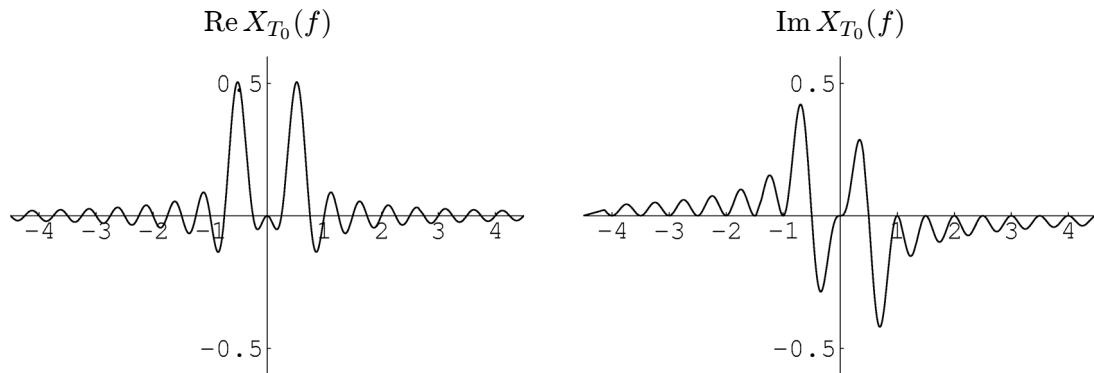


図 3.7: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos \pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 0.5 を除く $0, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 0.5) = \pm \pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています（**角速度が半分になる**）。なお、振幅は $\cos$ 波形の波のフーリエ変換に習って求めると 1 となります。したがって、元の関数

$$x(t) = \cos \pi t$$

が導き出されます。

理解を深めるために、周期 $T_0 = \frac{1}{2} = 0.5$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

もフーリエ変換してみましょう。この波を区間 $[0, \frac{1}{2}]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\cos 4\pi t)e^{-i2\pi ft} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i(f/2) \cdot (1 - e^{-i2\pi(f/2)})}{1 - (f/2)^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(f/2) \cdot (1 - e^{-i2\pi(f/2)})}{1 - (f/2)^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.8 のようになります。

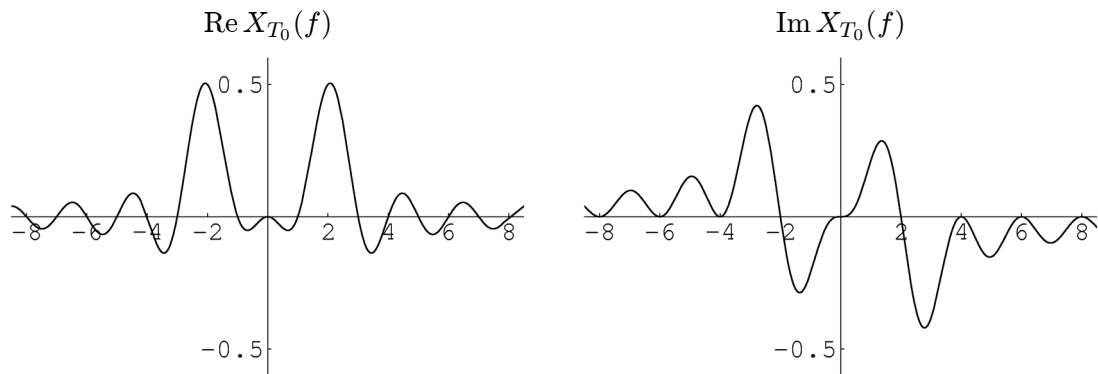


図 3.8: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos 4\pi t$)

このグラフを注意深く見てみると、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が ± 2 を除く $0, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフでは、周波数 f [Hz] が $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot (\pm 2) = \pm 4\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています（角速度が2倍になる）。なお、振幅は $\cos$ 波形の波のフーリエ変換に習って求めると 1 となります。したがって、元の関数

$$x(t) = \cos 4\pi t$$

が導き出されます。

この2つの例を $\cos$ 波形の波 $x(t) = A \cos 2\pi t$ と比較すると、2つの例の周波数スペクトル密度のグラフは、 $\cos$ 波形の波 $x(t) = A \cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフを横軸に $\frac{1}{T_0}$ 倍したグラフに他ならないことがわかります。したがって、ある波に対して、フーリエ変換の対象となる区間 (調べたい区間; 周期) T_0 [秒] が与えられると、その波の基準となる周波数 $f_0 = \frac{1}{T_0}$ [Hz] が決まります。すなわち、 nf_0 [Hz] ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) について調べれば、ある波の特徴を十分に捉えることができるわけです。この事実は非常に重要で、第4章の離散フーリエ変換 (デジタルフーリエ変換; 高速フーリエ変換) のサンプリングや分解能といった言葉の直接の概念を指しています。大げさですが、離散という言葉の要であるといっても過言ではないでしょう。

3.3.4 合成された波のフーリエ変換

これまで、個々の三角関数 (波) のフーリエ変換を見てきました。この節では、複数の三角関数の1次結合によって合成された波のフーリエ変換について考察しましょう (これがフーリエ変換の最大の特徴と言ってもよい)。例として、図3.9の周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つ波

$$x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$$

をフーリエ変換してみましょう。

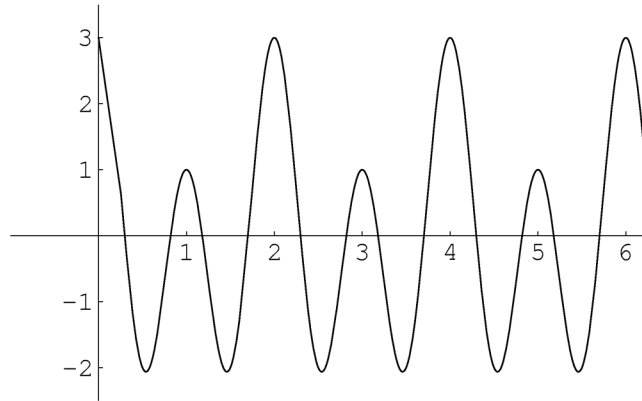


図 3.9: 合成された波のグラフ ($x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$)

この波を区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^2 (\cos \pi t + 2 \cos 2\pi t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} + 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if \cdot (1 - e^{-i2\pi f \cdot 2})}{1 - f^2} \end{aligned}$$

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \frac{X(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i(2f) \cdot (1 - e^{-i2\pi(2f)})}{1 - (2f)^2} + \frac{if \cdot (1 - e^{-i2\pi f \cdot 2})}{1 - f^2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および虚部 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.10 のようになります。

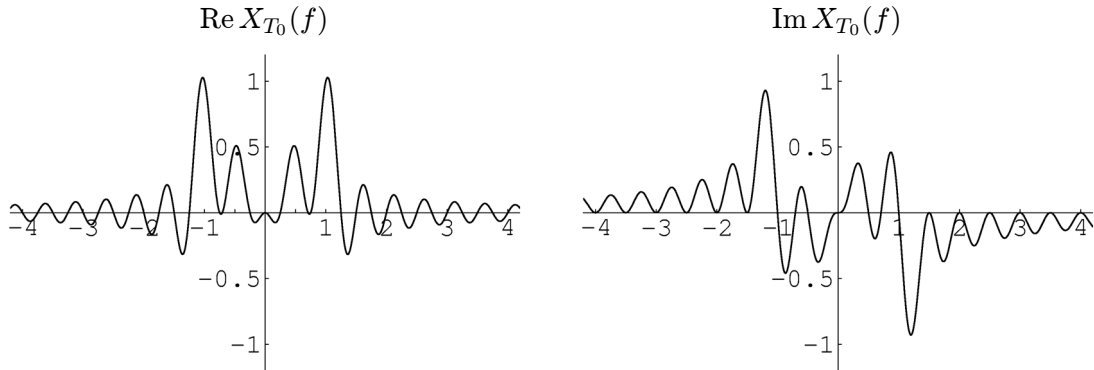


図 3.10: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$)

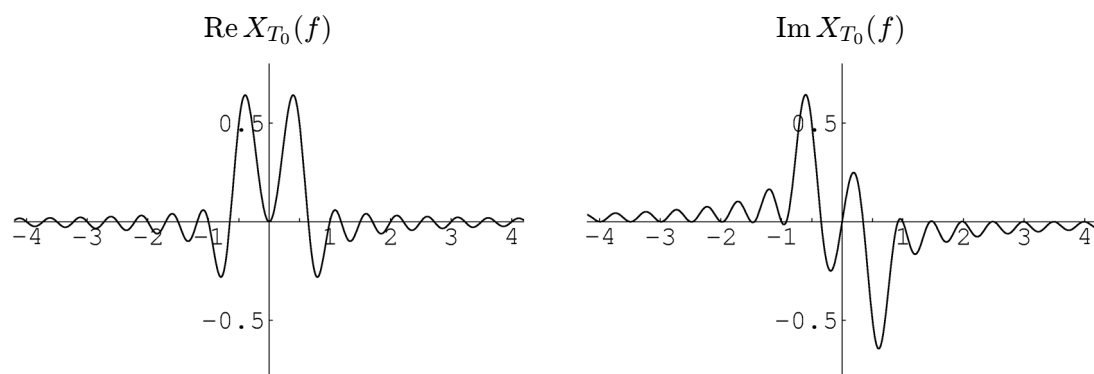
ここで、波 $x(t)$ の特徴を調べるために、各周波数の $\text{Re } X_{T_0}(f)$ および $\text{Im } X_{T_0}(f)$ の値を求めましょう。なお、前節の考察から、基準となる周波数を $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] として各周波数 nf_0 ($n = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$) について調べれば十分です。グラフを読むと、 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ では、周波数 f [Hz] が $\pm 0.5, \pm 1$ を除く $0, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっていますし、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ では、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$ の各点で値 0 をとっています。これは、元の波 $x(t)$ が、周波数 $f_1 = \pm 0.5$ および $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち角速度 $\omega_1 = \pi$ および $\omega_2 = 2\pi$ [rad/秒] の $\cos$ 波形の波から構成されていることを表しています (**周波数ごとに異なった三角関数の波となる**)。詳しい計算は省略しますが、それぞれ振幅 1 および 2 が求まり、元の関数

$$x(t) = \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$$

が求められます。なお、①式の前項が $\cos \pi t$ をフーリエ変換した式であり、次項が $\cos 2\pi t$ をフーリエ変換した式であることを利用すれば比較的楽に計算できます。このことは、波 $\cos \pi t + 2 \cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフが、波 $\cos \pi t$ と波 $\cos 2\pi t$ の周波数スペクトル密度のグラフを重ね合わせたものとなっていることでも確認できます。

以上の考察から、フーリエ変換によって、波を構成する三角関数を知ることができます。言い換えれば、フーリエ変換は、波を三角関数に分離することを可能にします。このテキストでは三角関数しかフーリエ変換しませんでした。もちろん、(周期を持たない) 一般の関数をフーリエ変換することができます。これは、つまり、一般の関数が三角関数の重ね合わせとして表せることを意味しています。すなわち、一般の関数のフーリエ級数が得られることになります。この利点を活かして、現代社会では、フーリエ変換の理論が様々なところで使われています。特に、コンピュータの登場によって、第 4 章で学ぶ離散フーリエ変換は活躍の場を更に広げています。

例題 1 周期 $T_0 = 2$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 2]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	∓ 0.5	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 2$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2} = 0.5$ [Hz] である。したがって、周波数 f [Hz] が $0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\cos$ 波形の波を含み、その振幅は、

$$\text{Re } X_{T_0}(0.5) + \text{Re } X_{T_0}(-0.5) = 0.5 + 0.5 = 1$$

となる。同様に、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_1 = \pm 0.5$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \pm\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、その振幅は、

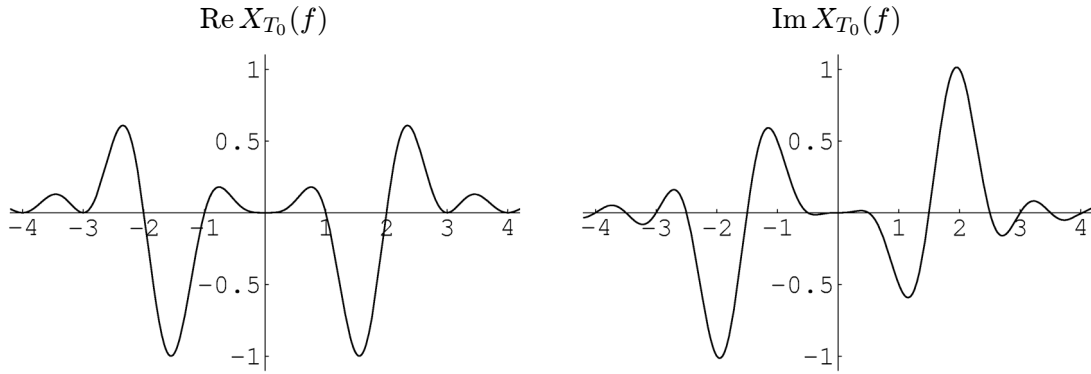
$$-\text{Im } X_{T_0}(0.5) + \text{Im } X_{T_0}(-0.5) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \cos \pi t + \sin \pi t$$

である。

例題 2 周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つある波 $x(t)$ を、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換したところ、以下の周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ のグラフを得た。ある波を求めなさい。なお、各周波数 f [Hz] の値は下表の通りである (符号同順)。



周波数 f [Hz]	0	± 0.5	± 1.0	± 1.5	± 2.0	± 2.5	± 3.0	± 3.5	± 4.0	$\dots$
$\text{Re } X_{T_0}(f)$	0	$\frac{4}{15\pi}$	0	$-\frac{108}{35\pi}$	0	$\frac{100}{63\pi}$	0	$\frac{196}{495\pi}$	0	$\dots$
$\text{Im } X_{T_0}(f)$	0	0	∓ 0.5	0	± 1	0	0	0	0	$\dots$

解答例 周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] である。したがって、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分である。 $\text{Re } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ の各点で $\text{Re } X_{T_0}(f) = 0$ であるから、ある波には $\cos$ 波形の波は含まれない。また、 $\text{Im } X_{T_0}(f)$ のグラフおよび表より、ある波は、 $f_2 = \pm 1$ [Hz] および $f_4 = \pm 2$ [Hz]、すなわち角速度

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi \text{ [rad/秒]}$$

および

$$\omega_4 = 2\pi f_4 = \pm 4\pi \text{ [rad/秒]}$$

の $\sin$ 波形の波を含み、これらの振幅は、それぞれ

$$-\text{Im } X_{T_0}(1) + \text{Im } X_{T_0}(-1) = -(-0.5) + 0.5 = 1$$

および

$$-\text{Im } X_{T_0}(2) + \text{Im } X_{T_0}(-2) = -1 \cdot 1 + (-1) = -2$$

となる。以上より、ある波 $x(t)$ は、

$$x(t) = \sin 2\pi t - 2 \sin 4\pi t$$

である。

3.3.5 初期位相を持つ波のフーリエ変換

これまで、初期位相 ϕ [rad] が 0 となるように $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波を個別に考えてきましたが、波の世界では、角速度 ω [rad/秒] ごとに、 $\cos$ 波形の波

$$C \cos(\omega t + \phi) \quad (C > 0)$$

の形式で表すことになっていました¹²。実際、

$$\begin{aligned} C \cos(\omega t + \phi) &= C(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \\ &= (C \cos \phi) \cos \omega t + (-C \sin \phi) \sin \omega t \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \end{aligned}$$

(ただし、 $A = C \cos \phi$ および $B = -C \sin \phi$ とする)

のように、初期位相が 0 の $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波で表すことができます。この節では、これまで個別に扱ってきた $\cos$ 波形の波と $\sin$ 波形の波を合成して、波の世界の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ で表すことと、そのフーリエ変換について考えましょう。

例として、波 $C \cos 2\pi t$ を 0.125 [秒] 進ませた波、すなわち、初期位相 $\phi = \frac{\pi}{4}$ [rad] の波

$$x(t) = C \cos(2\pi(t + 0.125)) = C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

のフーリエ変換について考察しましょう。なお、

$$C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t \quad \dots \textcircled{1}$$

となることに注意しておきましょう。この波は周期 $T_0 = 1$ [秒] を持つ波ですから、区間 $[0, 1]$ を積分区間としてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^1 C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cos 2\pi t dt - \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \sin 2\pi t dt \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}C\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \end{aligned}$$

¹²話の都合上、振幅の記号に C を用いました。なお、 $\sin$ 波形の波 $C \sin(\omega t + \phi)$ は、 $C \cos(\omega t + (\phi - \pi/2))$ と書き直せ、 $-C \cos(\omega t + \phi)$ は、 $C \cos(\omega t + (\phi - \pi))$ と書き直せるため、基本的な波は、全て振幅 C (> 0) の $\cos$ 波形の波 $C \cos(\omega t + \phi)$ の形式で表すことができます。

となります。さらに、波の特徴を調べるために周波数スペクトル密度を求めると

$$X_{T_0}(f) = \frac{X(f)}{T_0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2}$$

となります。また、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ の実部 $\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および虚部 $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$ のグラフを描くと図 3.11 のようになります。

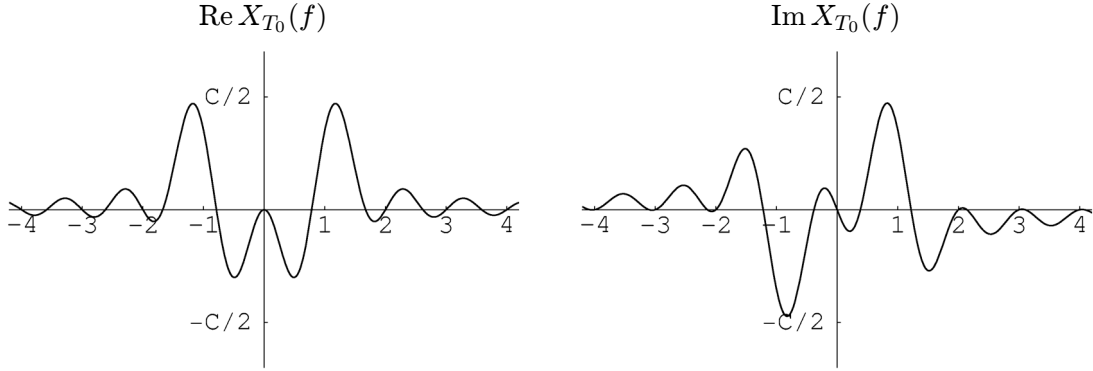


図 3.11: 関数 $X_{T_0}(f)$ の実部および虚部のグラフ ($x(t) = C \cos(2\pi t - \pi/4)$)

ここで、波 $x(t)$ の特徴を調べるために、各周波数の $X_{T_0}(f)$ ($\operatorname{Re} X_{T_0}(f)$ および $\operatorname{Im} X_{T_0}(f)$) の値を求めましょう。周期 $T_0 = 1$ [秒] より、基準となる周波数は $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1} = 1$ [Hz] となるので、周波数 f [Hz] が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ について調べれば十分です。グラフより、周波数 $f_2 = \pm 1$ [Hz]、すなわち、角速度 $\omega_2 = 2\pi f_2 = \pm 2\pi$ [rad/秒] の波によって構成されていることがわかります (それ以外の値は 0)。具体的に値を求めると、

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow \pm 1} X_{T_0}(f) &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \right) \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{if(1 - e^{-i2\pi f})}{1 - f^2} \\ &\quad - \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi f}}{1 - f^2} \\ &= \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i(1 - e^{-i2\pi f}) + if(-(-i2\pi)e^{-i2\pi f})}{-2f} \\ &\quad - \lim_{f \rightarrow \pm 1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(-i2\pi)e^{-i2\pi f}}{-2f} \quad (\because \text{ロピタルの定理}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} C \right) \cdot \left(\mp i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} C}{4} (1 \pm i) \quad (\text{符号同順}) \end{aligned}$$

となります。これまで通り、 $\cos$ 波形の波 $\cos 2\pi t$ および $\sin$ 波形の波 $\sin 2\pi t$ に分けて振幅を求めると、

$$\operatorname{Re} X_{T_0}(1) + \operatorname{Re} X_{T_0}(-1) = \frac{\sqrt{2}C}{4} + \frac{\sqrt{2}C}{4} = \frac{\sqrt{2}C}{2}$$

および

$$-\operatorname{Im} X_{T_0}(1) + \operatorname{Im} X_{T_0}(-1) = -\left(\frac{\sqrt{2}C}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}C}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}C}{2}$$

となり、元の波

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}C}{2} \cos 2\pi t + \left(-\frac{\sqrt{2}C}{2}\right) \sin 2\pi t$$

が求まります。もちろん、①式より、この波は、

$$x(t) = C \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

と書き換えられ、元の波と一致していることがわかります。

波の世界の基本波形

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{ただし、}\omega = 2\pi f \text{ とする})$$

を

$$(\text{与式}) = C \frac{e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}}{2} = \left(\frac{C}{2} e^{i\phi}\right) e^{i\omega t} + \left(\frac{C}{2} e^{-i\phi}\right) e^{-i\omega t}$$

と変形し、別の見方をしてみましょう。このとき、これまでの考察から、

$$\frac{C}{2} e^{i\phi} = X_{T_0}(f) \quad \text{および} \quad \frac{C}{2} e^{-i\phi} = X_{T_0}(-f) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかります。そこで、

$$\frac{C}{2} e^{i\phi} = \frac{C}{2} (\cos \phi + i \sin \phi) = X_{T_0}(f)$$

より、まず、初期位相

$$\phi = \arg\left(\frac{C}{2} e^{i\phi}\right) = \arg X_{T_0}(f) \quad (\text{同様に、}\phi = -\arg X_{T_0}(-f))$$

を求めます。求めた初期位相 ϕ [rad] を②式に代入すると振幅

$$C = \frac{2X_{T_0}(f)}{e^{i\phi}} \quad (\text{同様に、} C = \frac{2X_{T_0}(-f)}{e^{-i\phi}})$$

が求められます。さらに、

$$\begin{aligned} C &= \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = \frac{X_{T_0}(f)}{e^{i\phi}} + \frac{X_{T_0}(-f)}{e^{-i\phi}} \quad (\because \textcircled{2} \text{式を代入}) \\ &= \frac{e^{-i\phi} X_{T_0}(f) + e^{i\phi} X_{T_0}(-f)}{e^{i\phi} e^{-i\phi}} = e^{-i\phi} X_{T_0}(f) + e^{i\phi} X_{T_0}(-f) \\ &= \frac{2X_{T_0}(-f)}{C} X_{T_0}(f) + \frac{2X_{T_0}(f)}{C} X_{T_0}(-f) \quad (\because \textcircled{2} \text{式を代入}) \\ &= \frac{4}{C} X_{T_0}(f) X_{T_0}(-f) \end{aligned}$$

より、 $X_{T_0}(f)X_{T_0}(-f) = |X_{T_0}(f)|^2 = |X_{T_0}(-f)|^2$ に注意すると、

$$C^2 = 4X_{T_0}(f)X_{T_0}(-f) = 4|X_{T_0}(f)|^2$$

が成り立つことから、 $C > 0$ にも注意すれば、

$$C = 2|X_{T_0}(f)| = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(f)| = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(-f)|$$

という関係が得られます。以上の考察より、波 $x(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ をフーリエ変換して得られる周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ を使って、直接、

$$\text{振幅 } C = |X_{T_0}(f)| + |X_{T_0}(-f)|,$$

$$\text{初期位相 } \phi = \arg X_{T_0}(f)$$

を求めることもできます。例を使って確認してみると、それぞれ、

$$|X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = \left| \frac{\sqrt{2}C}{4}(1+i) \right| + \left| \frac{\sqrt{2}C}{4}(1-i) \right| = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg \left(\frac{\sqrt{2}C}{4}(1+i) \right) = \frac{\pi}{4}$$

のように、確かに振幅と初期位相が求められます。

この節の締めくくりとして、周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(f)$ が複素フーリエ係数 c_n と一致することを述べておきます。この節の最初にも述べたように、波の世界の基本波形 $C \cos(\omega t + \phi)$ は、

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (A = C \cos \phi, B = -C \sin \phi)$$

と表せます。ここで、上式を次のように変形します。

$$\begin{aligned} A \cos \omega t + B \sin \omega t &= A \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + B \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\ &= A \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} - iB \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \frac{A - iB}{2} e^{i\omega t} + \frac{A + iB}{2} e^{-i\omega t} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

第 3.3.1 節および第 3.3.2 節で述べたように、 A と B は、それぞれ三角関数によるフーリエ級数の a_n と b_n に対応していることから、③式の前項は複素フーリエ係数の定義そのもので、 c_n に一致していることがわかります。同様に、③式の後項は複素フーリエ係数 c_{-n} に一致していることがわかります。さらに、②式と比較すると、 $X_{T_0}(f) = c_n$ および $X_{T_0}(-f) = c_{-n}$ となることがわかります。すなわち、周波数スペクトル密度を求めるということは、複素フーリエ級数展開を行なって複素フーリエ係数を求めていることに他ならないということです。

例題 1 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 1$ [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 1) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 $A (> 0)$, 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $A \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。

解答例 周波数 $f = \pm 1$ [Hz] より、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] である。また、振幅 A および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$A = |X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |1| + |1| = 1 + 1 = 2,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

である。したがって、ある波は、

$$x(t) = 2 \cos \left(2\pi t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

である。

* $|X_{T_0}(1)|$ と $|X_{T_0}(-1)|$ は、両方計算しなくても、片方計算すれば十分です。

例題 2 ある波 $x(t)$ をフーリエ変換したところ、周波数 $f = \pm 1$ および ± 3 [Hz] の点で周波数スペクトル密度 $X_{T_0}(\pm 1) = 3$ および $X_{T_0}(\pm 3) = \mp i2$ (符号同順) を得た。角速度 ω [rad/秒], 振幅 $A (> 0)$, 初期位相 ϕ [rad] を求め、波の基本波形 $A \cos(\omega t + \phi)$ の形式にしたがってある波 $x(t)$ を表しなさい。

解答例 周波数 $f = \pm 1$ [Hz] のとき、角速度 $\omega = 2\pi f = \pm 2\pi$ [rad/秒] で、振幅 A および初期位相 ϕ [rad] は、それぞれ、

$$A = |X_{T_0}(1)| + |X_{T_0}(-1)| = |3| + |3| = 3 + 3 = 6,$$

$$\phi = \arg X_{T_0}(1) = \arg(3 + i0) = 0$$

である。同様に、周波数 $f' = \pm 3$ [Hz] のとき、角速度 $\omega' = 2\pi f' = \pm 6\pi$ [rad/秒] で、振幅 A' および初期位相 ϕ' [rad] は、それぞれ、

$$A' = |X_{T_0}(3)| + |X_{T_0}(-3)| = |-i2| + |i2| = 2 + 2 = 4,$$

$$\phi' = \arg X_{T_0}(3) = \arg(0 - i2) = -\frac{\pi}{2}$$

である。以上より、ある波は、

$$x(t) = 6 \cos(2\pi t) + 2 \cos \left(6\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

である。