

2008 年度 情報数理 レポート 2

学生用

学籍番号： _____

氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2008 年 10 月 28 日 (火) 13:00 まで

提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上 (学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し (問→解答→問→解答→… の順になるように記述すること)、A4 サイズの用紙に印刷して提出すること (手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 情報数理について、あなたの声を聞かせてください (教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ (成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人

出題日： 2008 年 10 月 16 日 (木)

得点：

/6

----- 切り取り線 -----

2008 年度 情報数理 レポート 2

教員控

学籍番号： _____

氏名： _____

協力者氏名： _____ , _____ , _____

レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：

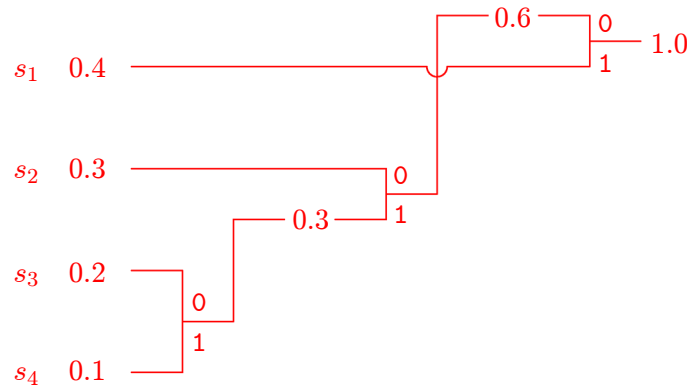
/6

意見・質問：

問 1 ある情報源 S から発生する 4 種類の通報について、次の (1)～(3) の問いに答えなさい。
ただし、情報源 S から発生する 4 種類の通報の情報源記号をそれぞれ s_1, s_2, s_3, s_4 とし、その生起確率をそれぞれ $p(s_1) = 0.4, p(s_2) = 0.3, p(s_3) = 0.2, p(s_4) = 0.1$ とする。

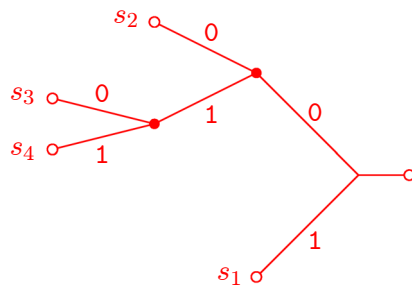
(1) テキスト (p.12) に習って、「(a) 構成法」, 「(b) 符号の木」 および 「(c) 符号」 をそれぞれ描きなさい (Huffman の符号化法 I を用いて情報源 S を符号化しなさい)。(3 点; 各 1 点)

解答例 情報源 S に Huffman の符号化法 I を適用する。



(a) 構成法

上記の「(a) 構成法」より、「(b) 符号の木」 および 「(c) 符号」 は以下の通りである。



(b) 符号の木

s_1 (1)
 s_2 (00)
 s_3 (010)
 s_4 (011)

(c) 符号

評価基準 テキストに習って正しく描けていること。

(2) (1) で求めた符号の平均符号長 L を求めなさい。(1 点)

解答例 (1) より、情報源記号 s_1, s_2, s_3, s_4 の符号長はそれぞれ $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3, l_4 = 3$ であるから、平均符号長 L は、

$$L = \sum_{i=1}^4 l_i p_i = \sum_{i=1}^4 l_i p(s_i) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1.9 \text{ (ビット)}$$

である。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 1 点。

(3) 情報源 S を 2 進符号に符号化したときの平均符号長の下限 $H(S)$ を、四捨五入により小数点以下第 2 位まで求めなさい。(1 点)

解答例 平均符号長の下限 $H(S)$ は、

$$\begin{aligned} H(S) &= - \sum_{i=1}^4 p(s_i) \log_2 p(s_i) \\ &= - (0.4 \log_2 0.4 + 0.3 \log_2 0.3 + 0.2 \log_2 0.2 + 0.1 \log_2 0.1) \\ &= 1.846 \cdots \quad \leftarrow \text{小数点以下第 3 位を四捨五入する} \\ &\doteq 1.85 \text{ (ビット)} \end{aligned}$$

である。

【注意】 平均符号長の下限 $H(S)$ は、Huffman の符号化法 II を繰り返し適用することによって得られる。また、情報量は平均符号長の下限 $H(S)$ によって定義される。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 1 点。

問 2 テキスト (17 ページ) の補助定理 2.2 の証明を完了しなさい。テキストに記した $n = 2$ の場合を参考にするとよい。(1 点)

解答例

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= H(S^n) = \sum_{i=1}^{M^n} p(\sigma_i) \log_r \frac{1}{p(\sigma_i)} \\ &= \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n})} \end{aligned}$$

となる。ここで、記号が独立に生起することから $p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) = p(s_{i_1})p(s_{i_2}) \cdots p(s_{i_n})$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_1})p(s_{i_2}) \cdots p(s_{i_n})} \\
 &= \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_1})} \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_2})} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_n})}
 \end{aligned}$$

となる。また、確率の性質から第 j 項 ($j = 1, 2, \dots, n$) に対して

$$p(s_{i_j}) = \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^M \sum_{i_{j+1}=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n})$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \sum_{i_1=1}^M \left(\sum_{i_2=1}^M \sum_{i_3=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \right) \log_r \frac{1}{p(s_{i_1})} \\
 &\quad + \sum_{i_2=1}^M \left(\sum_{i_1=1}^M \sum_{i_3=1}^M \cdots \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \right) \log_r \frac{1}{p(s_{i_2})} \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \sum_{i_n=1}^M \left(\sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \cdots \sum_{i_{n-1}=1}^M p(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}) \right) \log_r \frac{1}{p(s_{i_n})} \\
 &= \sum_{i_1=1}^M p(s_{i_1}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_1})} + \sum_{i_2=1}^M p(s_{i_2}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_2})} + \cdots + \sum_{i_n=1}^M p(s_{i_n}) \log_r \frac{1}{p(s_{i_n})}
 \end{aligned}$$

となる。なお、与式の各項はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^M p(s_i) \log_r \frac{1}{p(s_i)}$$

の形をしており、 $H(S)$ に等しい。ゆえに、

$$H(S^n) = nH(S)$$

が成り立つ。 ■

評価基準 解答例に準じた解答であれば1点。