

2006年度 情報科学I 期末試験 (その1)

実施日：2006年7月19日

学籍番号：

氏名：

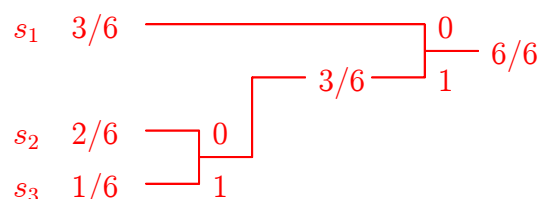
問題 1 情報源

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} s_1, & s_2, & s_3 \\ p(s_1) = \frac{3}{6}, & p(s_2) = \frac{2}{6}, & p(s_3) = \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

について、次の(1)～(2)の問いに答えなさい。

- (1) 情報源 S を Huffman の符号化法 I で2元符号に符号化するとき、 S の平均符号長を小数以下第2位まで求めなさい。(5点)

解答例 Huffman の符号化法 I の構成法は(例えば)下図のようになる。



従って、事象 s_1 の符号長は1 ($= l_1$) ビット、事象 s_2 および s_3 の符号長は2 ($= l_2 = l_3$) ビットとなる。ゆえに、情報源 S の平均符号長は、

$$L = \sum_{i=1}^3 l_i p(s_i) = 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = 1.50 \text{ (ビット)}$$

となる。

答 1.50 ビット

- (2) 情報源 S の情報量 (エントロピー) を小数以下第2位まで求めなさい。ただし、 $\log_2 3 \doteq 1.585$ とする。(5点)

解答例 情報源 S の情報量は、

$$H(S) = - \sum_{i=1}^3 p(s_i) \log_2 p(s_i) = - \left(\frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \log_2 \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \right) = \frac{4 + 3 \log_2 3}{6} \doteq 1.459 \doteq 1.46 \text{ (ビット)}$$

となる。

* Huffman の符号化法 II を繰り返し適用すれば、平均符号長は $\frac{4 + 3 \log_2 3}{6}$ に近づきます。

答 1.46 ビット

2006年度 情報科学I 期末試験 (その2)

実施日：2006年7月19日

学籍番号：

氏名：

問題 2 GF(2⁴) 上の 3 個 (最小距離 7) の誤りが訂正可能な [15,9] RS 符号において、受信語

$$\mathbf{y} = (\alpha^5, \alpha^3, \alpha^2, 1, 1, \alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

の誤りの検出および誤りがあれば誤りの訂正を行ないたい。次の (1)～(4) の問いに答えなさい。ただし、GF(2⁴) の原始多項式を $x^4 + x + 1$ とし、 α をその根とする (必要であれば下表を埋め計算に利用しなさい)。また、生成多項式を

$$G(x) = (x - \alpha^0)(x - \alpha^1)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4)(x - \alpha^5)$$

とし、受信語 $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{14})$ の多項式表現を

$$Y(x) = y_0 + y_1x + y_2x^2 + \dots + y_{14}x^{14}$$

とする。

べき表現	展開	べき表現	展開
α^0	1	α^8	$1 + \alpha^2$
α^1	α	α^9	$\alpha + \alpha^3$
α^2	α^2	α^{10}	$1 + \alpha + \alpha^2$
α^3	α^3	α^{11}	$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3$
α^4	$1 + \alpha$	α^{12}	$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$
α^5	$\alpha + \alpha^2$	α^{13}	$1 + \alpha^2 + \alpha^3$
α^6	$\alpha^2 + \alpha^3$	α^{14}	$1 + \alpha^3$
α^7	$1 + \alpha + \alpha^3$	α^{15}	1

(1) 受信語 $\mathbf{y}$ のシンジローム S_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) を求めなさい。 α のべき表現で答えること。(2 点 × 5)

解答例 受信語 $\mathbf{y}$ の多項式表現は

$$Y(x) = \alpha^5 + \alpha^3x + \alpha^2x^2 + x^3 + x^4 + \alpha x^5$$

となる。従って、シンジローム S_i は

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = Y(\alpha^0) = \alpha^5 + \alpha^3 \cdot 1 + \alpha^2 \cdot 1 + 1 + 1 + \alpha \cdot 1 = \alpha^3 \\ S_1 = Y(\alpha^1) = \alpha^5 + \alpha^3 \cdot \alpha + \alpha^2 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha \cdot \alpha^5 = 1 \\ S_2 = Y(\alpha^2) = \alpha^5 + \alpha^3 \cdot \alpha^2 + \alpha^2(\alpha^2)^2 + (\alpha^2)^3 + (\alpha^2)^4 + \alpha(\alpha^2)^5 = \alpha^7 \\ S_3 = Y(\alpha^3) = \alpha^5 + \alpha^3 \cdot \alpha^3 + \alpha^2(\alpha^3)^2 + (\alpha^3)^3 + (\alpha^3)^4 + \alpha(\alpha^3)^5 = \alpha^3 \\ S_4 = Y(\alpha^4) = \alpha^5 + \alpha^3 \cdot \alpha^4 + \alpha^2(\alpha^4)^2 + (\alpha^4)^3 + (\alpha^4)^4 + \alpha(\alpha^4)^5 = \alpha^7 \\ S_5 = Y(\alpha^5) = \alpha^5 + \alpha^3 \cdot \alpha^5 + \alpha^2(\alpha^5)^2 + (\alpha^5)^3 + (\alpha^5)^4 + \alpha(\alpha^5)^5 = \alpha^8 \end{array} \right.$$

となる。

答 $S_0 = \alpha^3$, $S_1 = 1$, $S_2 = \alpha^7$, $S_3 = \alpha^3$, $S_4 = \alpha^7$, $S_5 = \alpha^8$

2006年度 情報科学I 期末試験 (その3)

実施日：2006年7月19日

学籍番号：

氏名：

(2) 誤り位置多項式を

$$\sigma(x) = x^3 + \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x + \sigma_3$$

とするとき、誤り位置を求めるための $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を変数とする連立1次方程式を求めなさい。ただし、シンδροームを S_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) とする。(10点)

解答例 [15,9] RS 符号は最大で3個の誤りが訂正可能であるから、誤り位置を $\alpha^{k_1}, \alpha^{k_2}, \alpha^{k_3}$ とし、その誤りの値をそれぞれ $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}$ とする。このとき、誤り位置多項式の解と係数の関係から、関係式

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha^{k_1} + \alpha^{k_2} + \alpha^{k_3} \\ \sigma_2 = \alpha^{k_1}\alpha^{k_2} + \alpha^{k_2}\alpha^{k_3} + \alpha^{k_3}\alpha^{k_1} \\ \sigma_3 = \alpha^{k_1}\alpha^{k_2}\alpha^{k_3} \end{cases}$$

を得る。更に、シンδροームは

$$\begin{cases} S_0 = Y(\alpha^0) = a_{k_1}(\alpha^{k_1})^0 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^0 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^0 = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} \\ S_1 = Y(\alpha^1) = a_{k_1}(\alpha^{k_1})^1 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^1 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^1 = a_{k_1}\alpha^{k_1} + a_{k_2}\alpha^{k_2} + a_{k_3}\alpha^{k_3} \\ S_2 = Y(\alpha^2) = a_{k_1}(\alpha^{k_1})^2 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^2 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^2 \\ S_3 = Y(\alpha^3) = a_{k_1}(\alpha^{k_1})^3 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^3 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^3 \\ S_4 = Y(\alpha^4) = a_{k_1}(\alpha^{k_1})^4 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^4 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^4 \\ S_5 = Y(\alpha^5) = a_{k_1}(\alpha^{k_1})^5 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^5 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^5 \end{cases}$$

となるので、関係式

$$\begin{aligned} S_2\sigma_1 &= (a_{k_1}(\alpha^{k_1})^2 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^2 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^2)(\alpha^{k_1} + \alpha^{k_2} + \alpha^{k_3}) \\ &= a_{k_1}(\alpha^{k_1})^3 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^3 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^3 \\ &\quad + (a_{k_1}\alpha^{k_1} + a_{k_2}\alpha^{k_2} + a_{k_3}\alpha^{k_3})(\alpha^{k_1}\alpha^{k_2} + \alpha^{k_2}\alpha^{k_3} + \alpha^{k_3}\alpha^{k_1}) \\ &\quad - (a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3})(\alpha^{k_1}\alpha^{k_2}\alpha^{k_3}) \\ &= S_3 + S_1\sigma_2 - S_0\sigma_3, \\ S_3\sigma_1 &= (a_{k_1}(\alpha^{k_1})^3 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^3 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^3)(\alpha^{k_1} + \alpha^{k_2} + \alpha^{k_3}) \\ &= a_{k_1}(\alpha^{k_1})^4 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^4 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^4 \\ &\quad + (a_{k_1}(\alpha^{k_1})^2 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^2 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^2)(\alpha^{k_1}\alpha^{k_2} + \alpha^{k_2}\alpha^{k_3} + \alpha^{k_3}\alpha^{k_1}) \\ &\quad - (a_{k_1}\alpha^{k_1} + a_{k_2}\alpha^{k_2} + a_{k_3}\alpha^{k_3})(\alpha^{k_1}\alpha^{k_2}\alpha^{k_3}) \\ &= S_4 + S_2\sigma_2 - S_1\sigma_3, \\ S_4\sigma_1 &= (a_{k_1}(\alpha^{k_1})^4 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^4 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^4)(\alpha^{k_1} + \alpha^{k_2} + \alpha^{k_3}) \\ &= a_{k_1}(\alpha^{k_1})^5 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^5 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^5 \\ &\quad + (a_{k_1}(\alpha^{k_1})^3 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^3 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^3)(\alpha^{k_1}\alpha^{k_2} + \alpha^{k_2}\alpha^{k_3} + \alpha^{k_3}\alpha^{k_1}) \\ &\quad - (a_{k_1}(\alpha^{k_1})^2 + a_{k_2}(\alpha^{k_2})^2 + a_{k_3}(\alpha^{k_3})^2)(\alpha^{k_1}\alpha^{k_2}\alpha^{k_3}) \\ &= S_5 + S_3\sigma_2 - S_2\sigma_3 \end{aligned}$$

を得る。従って、連立1次方程式

$$\begin{cases} S_3 - S_2\sigma_1 + S_1\sigma_2 - S_0\sigma_3 = 0 \\ S_4 - S_3\sigma_1 + S_2\sigma_2 - S_1\sigma_3 = 0 \\ S_5 - S_4\sigma_1 + S_3\sigma_2 - S_2\sigma_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\Longleftrightarrow \begin{cases} S_3 + S_2\sigma_1 + S_1\sigma_2 + S_0\sigma_3 = 0 \\ S_4 + S_3\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_1\sigma_3 = 0 \\ S_5 + S_4\sigma_1 + S_3\sigma_2 + S_2\sigma_3 = 0 \end{cases} \right)$$

を得る (GF(2⁴) 上の演算であるから減法と加法を同一視してもよい)。

2006年度 情報科学I 期末試験 (その4)

実施日：2006年7月19日

学籍番号：

氏名：

(3) 受信語 $\mathbf{y}$ の誤り位置を求めなさい。 α のべき表現で答えること。(10点)

(ヒント： $\sigma_3 = \alpha^6$)

解答例 (1) および (2) より、連立1次方程式

$$\begin{cases} \alpha^3 + \alpha^7 \sigma_1 + \sigma_2 + \alpha^3 \sigma_3 = 0 \\ \alpha^7 + \alpha^3 \sigma_1 + \alpha^7 \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \\ \alpha^8 + \alpha^7 \sigma_1 + \alpha^3 \sigma_2 + \alpha^7 \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

を得る。これを解くと

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha \\ \sigma_2 = \alpha^{10} \\ \sigma_3 = \alpha^6 \end{cases}$$

となる。ゆえに、誤り位置多項式は

$$\sigma(x) = x^3 + \alpha x^2 + \alpha^{10} x + \alpha^6$$

となるので、 $\text{GF}(2^4)$ の元を順次代入し誤り位置を見つける：

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha^0) &= 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + \alpha^{10} \cdot 1 + \alpha^6 = \alpha^3, \\ \sigma(\alpha^1) &= \alpha^3 + \alpha \cdot \alpha^2 + \alpha^{10} \cdot \alpha + \alpha^6 = \alpha, \\ \sigma(\alpha^2) &= (\alpha^2)^3 + \alpha(\alpha^2)^2 + \alpha^{10}(\alpha^2) + \alpha^6 = \alpha^{14}, \\ \sigma(\alpha^3) &= (\alpha^3)^3 + \alpha(\alpha^3)^2 + \alpha^{10}(\alpha^3) + \alpha^6 = 0, \\ \sigma(\alpha^4) &= (\alpha^4)^3 + \alpha(\alpha^4)^2 + \alpha^{10}(\alpha^4) + \alpha^6 = 0, \\ \sigma(\alpha^5) &= (\alpha^5)^3 + \alpha(\alpha^5)^2 + \alpha^{10}(\alpha^5) + \alpha^6 = \alpha^{14}, \\ \sigma(\alpha^6) &= (\alpha^6)^3 + \alpha(\alpha^6)^2 + \alpha^{10}(\alpha^6) + \alpha^6 = \alpha^7, \\ \sigma(\alpha^7) &= (\alpha^7)^3 + \alpha(\alpha^7)^2 + \alpha^{10}(\alpha^7) + \alpha^6 = \alpha^8, \\ \sigma(\alpha^8) &= (\alpha^8)^3 + \alpha(\alpha^8)^2 + \alpha^{10}(\alpha^8) + \alpha^6 = \alpha^9, \\ \sigma(\alpha^9) &= (\alpha^9)^3 + \alpha(\alpha^9)^2 + \alpha^{10}(\alpha^9) + \alpha^6 = \alpha^4, \\ \sigma(\alpha^{10}) &= (\alpha^{10})^3 + \alpha(\alpha^{10})^2 + \alpha^{10}(\alpha^{10}) + \alpha^6 = \alpha^{10}, \\ \sigma(\alpha^{11}) &= (\alpha^{11})^3 + \alpha(\alpha^{11})^2 + \alpha^{10}(\alpha^{11}) + \alpha^6 = \alpha^{13}, \\ \sigma(\alpha^{12}) &= (\alpha^{12})^3 + \alpha(\alpha^{12})^2 + \alpha^{10}(\alpha^{12}) + \alpha^6 = \alpha^6, \\ \sigma(\alpha^{13}) &= (\alpha^{13})^3 + \alpha(\alpha^{13})^2 + \alpha^{10}(\alpha^{13}) + \alpha^6 = \alpha^6, \\ \sigma(\alpha^{14}) &= (\alpha^{14})^3 + \alpha(\alpha^{14})^2 + \alpha^{10}(\alpha^{14}) + \alpha^6 = 0. \end{aligned}$$

以上より、誤り位置は $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^{14}$ である。

2006年度 情報科学I 期末試験 (その5)

実施日：2006年7月19日

学籍番号：

氏名：

(4) (3) で求めた誤り位置に対する誤りの値を求め、受信語 $\mathbf{y}$ の誤りを訂正しなさい。(10点)

(ヒント：誤りの値は $\alpha, \alpha^5, \alpha^6$ の何れか)

解答例 (1), (2), (3) より、連立1次方程式

$$\begin{cases} (S_0 =) \alpha^3 = a_3 + a_4 + a_{14} \\ (S_1 =) 1 = a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 + a_{14}\alpha^{14} \\ (S_2 =) \alpha^7 = a_3(\alpha^3)^2 + a_4(\alpha^4)^2 + a_{14}(\alpha^{14})^2 \end{cases}$$

を得る。これを解くと、誤り位置 $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^{14}$ に対するそれぞれの誤りの値は、

$$\begin{cases} a_3 = \alpha^6 \\ a_4 = \alpha^5 \\ a_{14} = \alpha \end{cases}$$

となる。従って、誤りパターンは

$$\mathbf{e} = (0, 0, 0, \alpha^6, \alpha^5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha)$$

となるから、受信語 $\mathbf{y}$ の誤りを訂正すると

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \mathbf{e} = \mathbf{y} + \mathbf{e} &= (\alpha^5, \alpha^3, \alpha^2, 1 + \alpha^6, 1 + \alpha^5, \alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 + \alpha) \\ &= (\alpha^5, \alpha^3, \alpha^2, \underline{\alpha^{13}}, \underline{\alpha^{10}}, \alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \underline{\alpha}) \end{aligned}$$

となる。