第2章　2進数

2.1　10進数と r 進数

私達がふだん何気なく使っている数は**10 進数** (decimal numbers) で、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 10 個の文字 (数字) を使って書き表します。例えば、10 進数123.45 は

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

を意味し、各位には 10 のベキ乗数である 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2} の重みが付加されています。この重みの基準となる数を**基数** (radix) と呼び、基数が 10 となるように数を表現する方法を **10 進法**[1] (decimal notation) と呼びます。なお、123.45 のように各位の重みを省略して書き表す方法を**位取り記数法**、$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$ のように重みを付加して書き表す方法を**基数記数法** (radix numeration system) と呼びます。

これから学ぶコンピュータの世界では、コンピュータが直接扱うことのできる数、すなわち、基数を 2 として0 と1 の 2 個の数字を使って表す **2 進法** (binary notation) が基礎となります。例えば、2 進数110 を基数記数法で表せば

$$110 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \quad (=10\text{ 進数の}6)$$

となり 10 進数の6 であることがわかります。同様に、小数を含むような 2 進数1011.101 も

$$1011.101 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

と基数記数法で表わせば、10 進数の11.625 であることがわかります。また、10 進数の0 から10 までの数を **2 進数**[2] (binary numbers) で表すと表 2.1 のようになります。

[1] 10 進法によって表現された数を 10 進数と呼ぶ。
[2] 2 進法によって表現された数を 2 進数と呼ぶ。

10 進数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 進数	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

表 2.1: 10 進数と 2 進数の対応

情報科学の分野では、2 進法以外にもコンピュータで使用しやすく 10 進法に近く人間にも扱いやすい **8 進法**[3] (octal notation) や **16 進法**[4] (hexadecimal notation) がよく使われます (付録 A.1 参照, p.175)。なお、基数が 10 を越える場合[5]、数字だけでは数を表現する文字が足りないため、数字とアルファベットを使って書き表します。例えば、16 進数の場合、10, 11, 12, 13, 14, 15 に対応する文字として`A`, `B`, `C`, `D`, `E`, `F` を使って表します (表 2.2 参照)。

10 進数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8 進数	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17
16 進数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

表 2.2: 10 進数と 8 進数及び 16 進数の対応

以上をまとめると、一般の場合は次のようになります。

r 進数　**r 進法**によって表現された **r 進数**は、基数を r とし $0, 1, 2, \cdots, r-2, r-1$ の r 個の文字を使って書き表します。従って、r 進数 $a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_1\ a_0\ .\ a_{-1}\ \cdots\ a_{-m}$ は

$$a_n \times r^n + a_{n-1} \times r^{n-1} + \cdots + a_1 \times r^1 + a_0 \times r^0 + a_{-1} \times r^{-1} + \cdots + a_{-m} \times r^{-m}$$

を意味します。ただし、$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-m}$ は $0, 1, 2, \cdots, r-2, r-1$ のいずれかを取ります。前者は位取り記数法による表現で、後者は基数記数法による表現です。

【注意】16 進数`123` を 10 進法に直すと 291 となり、10 進数`123` とは異なった数になります。このテキストでは、r 進法によって表現された数 (r 進数) であることを明記するために、数の前に「r 進数」を付けて表すか、数の後ろに「`(`r`)`」を付けて表します。なお、省略されている場合は基本的に 10 進数として扱います。

10 進数の例:　10 進数`12345`, `12345(10)`, `123`, `1000(10)`
2 進数の例:　2 進数`1010.101`, `1010.101(2)`, `1000(2)`
8 進数の例:　8 進数`1234`, `5670(8)`, `-246(8)`, `1000(8)`
16 進数の例:　16 進数`7F`, `7F(16)`, `-F3.A(16)`, `1000(16)`

[3] 8 進法によって表現された数を **8 進数** (octal numbers) と呼ぶ。
[4] 16 進法によって表現された数を **16 進数** (hexadecimal numbers) と呼ぶ。
[5] このテキストでは 16 進数だけが当てはまります。

例題 1 2 進数1010 を 10 進数に直しなさい。

解答例 $1010(2) = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10(10)$

例題 2 0.1001(2) を 10 進数に直しなさい。

解答例 $0.1001(2) = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 0.5625(10)$

例題 3 8 進数123 を 10 進数に直しなさい。

解答例 $123(8) = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 83(10)$

例題 4 8 進数0.17 を 10 進数に直しなさい。

解答例 $0.17(8) = 1 \times 8^{-1} + 7 \times 8^{-2} = 0.234375(10)$

例題 5 AF(16) を 10 進数に直しなさい。

解答例 $\mathrm{AF}(16) = 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 175(10)$

例題 6 16 進数0.D を 10 進数に直しなさい。

解答例 $0.\mathrm{D}(2) = 13 \times 16^{-1} = 0.8125(10)$

問題 1 0.001(2), 0.01(2), 0.1(2), 1(2), 10(2), 100(2), 1000(2) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 2 10100.101(2), 10.0101(2), 111111(2), 0.1111(2), 0.11111111(2) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 3 0.001(8), 0.01(8), 0.1(8), 1(8), 10(8), 100(8), 1000(8) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 4 0.1(8), 0.3(8), 0.5(8), 0.7(8), 0.11(8), 0.13(8), 0.15(8), 0.17(8) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 5 B(16), D(16), F(16), F3(16), F9(16), FA(16), FC(16), FF(16) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 6 0.B(16), 0.D(16), 0.F(16), 0.F3(16), 0.F9(16), 0.FA(16), 0.FC(16), 0.FF(16) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 7 AB.1(16), 3D56(16), FFF(16), 0.0F(16), A3F9(16), 11FA(16), 3.FC(16), FF.FF(16) をそれぞれ 10 進数に直しなさい。

問題 8 16 進数で表すと7BC 年B 月19 日生まれの人がいる。10 進数に直しなさい。

● 覚えましょう — 2 のベキ乗数 —

コンピュータは 2 進法を基準としており、情報科学を学ぶ際に 2 のベキ乗数を 10 進数で表した数が至る所で現れます。従って、下表のベキ指数 n が 0 から 10 ぐらいまでの 2 のベキ乗数 2^n の値は覚えておくようにしましょう。

n	2^n
-1	0.5
-2	0.25
-3	0.125
-4	0.0625
-5	0.03125
-6	0.015625
-7	0.0078125
-8	0.00390625
-9	0.001953125
-10	0.0009765625
-11	0.00048828125
-12	0.000244140625
-13	0.0001220703125
-14	0.00006103515625
-15	0.000030517578125
-16	0.0000152587890625

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768

n	2^n
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648

2.2 基数変換

r 進数から r' 進数に変換することを**基数変換** (radix transmission) と呼び、数の表現を r 進法から r' 進法に変換します。前節では 2 進数・8 進数・16 進数を 10 進数へ変換する方法を学びましたが、この節では、逆に、10 進数から 2 進数・8 進数・16 進数へ変換する方法を学びましょう。

まず、10 進数の整数と小数を 2 進数の整数と小数へ基数変換する方法を説明します。

整数部の変換 例として 10 進数`91` を 2 進数に変換して見ましょう。計算方法 1 (計算方法 2) のように商が 0 になるまで繰り返し商を 2 で割り、各々で出た余りを下から順に並べることで 2 進数`1011011` に変換されます。

● 計算方法 1

$$
\begin{array}{rrcll}
 & & & \text{余り} & \\
91 \div 2 = & 45 & \cdots & 1 & \uparrow \\
45 \div 2 = & 22 & \cdots & 1 & \uparrow \\
22 \div 2 = & 11 & \cdots & 0 & \uparrow \\
11 \div 2 = & 5 & \cdots & 1 & \uparrow \\
5 \div 2 = & 2 & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 \div 2 = & 1 & \cdots & 0 & \uparrow \\
1 \div 2 = & 0 & \cdots & 1 & \uparrow
\end{array}
$$

● 計算方法 2

$$
\begin{array}{rrcll}
2 \,) & \underline{91} & & \text{余り} & \\
2 \,) & \underline{45} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 \,) & \underline{22} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 \,) & \underline{11} & \cdots & 0 & \uparrow \\
2 \,) & \underline{5} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 \,) & \underline{2} & \cdots & 1 & \uparrow \\
2 \,) & \underline{1} & \cdots & 0 & \uparrow \\
 & 0 & \cdots & 1 & \uparrow
\end{array}
$$

小数部の変換 例として 10 進数`0.6875` を 2 進数に変換して見ましょう。計算方法 1 (計算方法 2) のように小数部が 0 になるまで繰り返し小数部を 2 で掛け、各々で出た積の整数部を上から順に並べることで 2 進数`0.1011` に変換されます。

● 計算方法 1

$$
\begin{array}{rll}
0.6875 \times 2 = & 1.375 & \downarrow \\
0.375 \times 2 = & 0.75 & \downarrow \\
0.75 \times 2 = & 1.5 & \downarrow \\
0.5 \times 2 = & 1.0 & \downarrow
\end{array}
$$

● 計算方法 2

$$
\begin{array}{rl}
0.6875 & \\
\underline{\times \quad 2} & \\
1.375 & \downarrow \\
\underline{\times \quad 2} & \\
0.75 & \downarrow \\
\underline{\times \quad 2} & \\
1.5 & \downarrow \\
\underline{\times \quad 2} & \\
1.0 & \downarrow
\end{array}
$$

なお、10 進数`91.6875` のように整数部と小数部を持つ数については、図 2.1 のように整数部と小数部に分けてから、それぞれ 2 進数に変換し、合成することで基数変換を行うことができます。

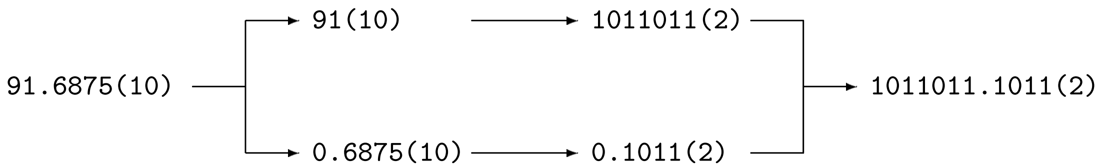

図 2.1: 整数部及び小数部を含む数の基数変換

では、なぜこのような手順に従って計算すると 2 進数に変換することがきるのでしょうか。考察してみることにしましょう。整数部の変換については、先ず、上記の各割り算の式を

$$\begin{aligned} 91 &= 45 \times 2 + 1 & \cdots \text{第 1 式} \\ 45 &= 22 \times 2 + 1 & \cdots \text{第 2 式} \\ 22 &= 11 \times 2 + 0 & \cdots \text{第 3 式} \\ 11 &= 5 \times 2 + 1 & \cdots \text{第 4 式} \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 & \cdots \text{第 5 式} \\ 2 &= 1 \times 2 + 0 & \cdots \text{第 6 式} \end{aligned}$$

のように変形します。次に、第 1 式に第 2 式, 第 3 式, 第 4 式, 第 5 式, 第 6 式と代入して行くと

$$\begin{aligned} 91 &= 45 \times 2 + 1 \\ &= (22 \times 2 + 1) \times 2 + 1 \\ &= 22 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \\ &= (11 \times 2 + 0) \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \\ &= 11 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \\ &= \texttt{1011011(2)} \end{aligned}$$

となり、明らかに基数を 2 とした数の表現に変換されていることがわかります。従って、このような計算で 2 進数を求めることができるのです。小数部についても同様の考察によって変換の仕組みを理解することができます (問題 6)。

上記の考察から、10 進数を r 進数へ変換するには、基数 2 を基数 r に読み替えて計算すれば良いことがわかります。言い換えると、整数部では繰り返し基数 r で割り、小数部では繰り返し基数 r で掛けることによって r 進数に変換することができます。例として、10 進数`91.6875` を 8 進数及び 16 進数へ変換する計算手順を挙げておきます。

8 進数へ変換

Step 2 (整数部)

$$\begin{aligned} 91 \div 8 = \ & 11 & \cdots \ & 3 \ \uparrow \\ 11 \div 8 = \ & 1 & \cdots \ & 3 \ \uparrow \\ 1 \div 8 = \ & 0 & \cdots \ & 1 \ \uparrow \end{aligned}$$

`133(8)`

Step 3 (小数部)

$$\begin{aligned} 0.6875 \times 8 &= 5.5 \ \downarrow \\ 0.5 \times 8 &= 4.0 \ \downarrow \end{aligned}$$

`0.54(8)`

従って　`133.54(8)`

16 進数へ変換

Step 2 (整数部)

$$\begin{aligned} 91 \div 16 = \ & 5 & \cdots \ & 11 \ \uparrow \\ 5 \div 16 = \ & 0 & \cdots \ & 5 \ \uparrow \end{aligned}$$

`5B(16)`

Step 3 (小数部)

$$0.6875 \times 16 = 11.0 \ \downarrow$$

`0.B(16)`

従って　`5B.B(16)`

例題 1　10 進数`100`をそれぞれ 2 進数・8 進数・16 進数に直しなさい。

解答例

$$\begin{array}{rrcrl} 100 \div 2 = & 50 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 50 \div 2 = & 25 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 25 \div 2 = & 12 & \cdots & 1 & \uparrow \\ 12 \div 2 = & 6 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 6 \div 2 = & 3 & \cdots & 0 & \uparrow \\ 3 \div 2 = & 1 & \cdots & 1 & \uparrow \\ 1 \div 2 = & 0 & \cdots & 1 & \uparrow \end{array}$$

`1100100(2)`

$$\begin{array}{rrcrl} 100 \div 8 = & 12 & \cdots & 4 & \uparrow \\ 12 \div 8 = & 1 & \cdots & 4 & \uparrow \\ 1 \div 8 = & 0 & \cdots & 1 & \uparrow \end{array}$$

`144(8)`

$$\begin{array}{rrcrl} 100 \div 16 = & 6 & \cdots & 4 & \uparrow \\ 6 \div 16 = & 0 & \cdots & 6 & \uparrow \end{array}$$

`64(16)`

例題 2　10 進数`0.1`を 2 進数に直しなさい。

解答例

$$\begin{array}{rrl} 0.1 \times 2 = & 0.2 & \downarrow \\ 0.2 \times 2 = & 0.4 & \downarrow \\ 0.4 \times 2 = & 0.8 & \downarrow \\ 0.8 \times 2 = & 1.6 & \downarrow \\ 0.6 \times 2 = & 1.2 & \downarrow \\ 0.2 \times 2 = & 0.4 & \downarrow \\ 0.4 \times 2 = & 0.8 & \downarrow \\ 0.8 \times 2 = & 1.6 & \downarrow \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \end{array}$$

答えは`0.0001100110011···(2)`で、`0011`が循環する循環小数となります。

*10 進数で実数として正しく表すことができても、2 進数で正しく表すことができるとは限りません。当然ですが、理由は 10 進数の基数には約数として 5 を含んでいますが、2 進数には含まれていないからです。数学的には 2 進数の分数で表すこともできますが、このテキストでは扱いませんので省略します。

次に、情報科学の分野でよく用いられる 2 進数・8 進数・16 進数の相互変換について学びましょう。コンピュータは 2 進数を直接扱いますが、人間は`10111001101`のように 0 と 1 の羅列によって表された数の大きさを直感的に理解するのは困難です。そのため、情報科学では 2 進数を 10 進数に近い 8 進数や 16 進数に変換して表すことがよくあります。8 進数や 16 進数は、基数が 2 のべき数のため 2 進数に関する性質を応用しやすく、2 進数・8 進数・16 進数間の基数変換を容易にします。

2 進数 ⟺8 進数　表 2.3 のように 8 進数の 1 桁は 2 進数の 3 桁に対応しています。このことを利用すると、2 進数から 8 進数への変換は、小数点を基準に 2 進数を 3 桁ずつに区切り、各 3 桁の 2 進数を対応する 1 桁の 8 進数に書き換えることによって実行されます。逆に、8 進数から 2 進数への変換は、8 進数の各桁を対応する 3 桁の 2 進数に書き換えることによって実行されます。

2 進数 ⟺16 進数　表 2.4 のように 16 進数の 1 桁は 2 進数の 4 桁に対応しており、8 進数と 16 進数の場合で異なるのは、3 桁が 4 桁になるということだけです。従って、2 進数から 16 進数への変換は、小数点を基準に 2 進数を 4 桁ずつに区切り、各 4 桁の 2 進数を対応する 1 桁の 16 進数に書き換えることによって実行されます。逆に、16 進数から 2 進数への変換は、16 進数の各桁を対応する 4 桁の 2 進数に書き換えることによって実行されます。

	2 進数	8 進数
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

表 2.3: 3 桁の 2 進数

	2 進数	16 進数
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

表 2.4: 4 桁の 2 進数

例として、先ほど計算した 2 進数1011011.1011 について 8 進数及び 16 進数へ基数変換を実行すると、以下のようになります。ただし、桁数を揃えるため適切に 0 を補います。

2 進数	001	011	011.	101	100
⇕	↕	↕	↕	↕	↕
8 進数	1	3	3 .	5	4

2 進数	0101	1011.	1011
⇕	↕	↕	↕
16 進数	5	B .	B

また、このような手順による変換が成り立つことは、容易に理解することができます。なぜなら、先ほどの 2 進数`1011011.1011` を小数点を基準に 3 桁ごとにまとめ、以下のような式変形を施すと

$$
\begin{aligned}
\mathtt{1011011.1011(2)} &= 1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0 \\
&\quad +1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}+1\times 2^{-4} \\
&= (0\times 2^8+0\times 2^7+1\times 2^6) \\
&\quad +(0\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3) \\
&\quad\quad +(0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0) \\
&\quad\quad\quad +(1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}) \\
&\quad\quad\quad\quad +(1\times 2^{-4}+0\times 2^{-5}+0\times 2^{-6}) \\
&= (0\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0)\times 2^6 \\
&\quad +(0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0)\times 2^3 \\
&\quad\quad +(0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0)\times 2^0 \\
&\quad\quad\quad +(1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0)\times 2^{-3} \\
&\quad\quad\quad\quad +(1\times 2^2+0\times 2^1+0\times 2^0)\times 2^{-6} \\
&= (1)\times 8^2+(3)\times 8^1+(3)\times 8^0+(5)\times 8^{-1}+(4)\times 8^{-2} \\
&= \mathtt{133.54(8)}
\end{aligned}
$$

となり、明らかに 8 進数に変換されていることがわかるからです。16 進数への変換についても、同様の考察から、直ちに成り立つことがわかります。

以上をまとめると図 2.2 のようになり、10 進数・2 進数・8 進数・16 進数の相互変換をスムーズに行うことができます。なお、8 進数から 16 進数への変換や 16 進数から 8 進数への変換は、一度 2 進数に直してから変換すると効率よく変換できます。

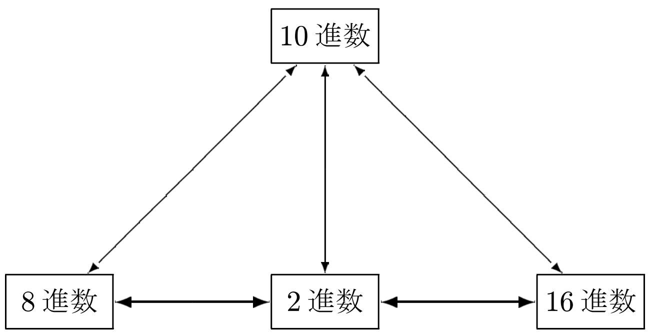

図 2.2: 10 進数・2 進数・8 進数・16 進数の相互変換

例題 3　2 進数10110101 をそれぞれ 8 進数・16 進数に直しなさい。

解答例

2 進数	010	110	101
$\Updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
8 進数	2	6	5

2 進数	1011	0101
$\Updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
16 進数	B	5

例題 4　16 進数FFF を 8 進数に直しなさい。

解答例

16 進数	F	F	F		
$\Updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		
2 進数	1111	1111	1111		2 進数に直し、
2 進数	111	111	111	111	3 桁に区切り直す
$\Updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
8 進数	7	7	7	7	

問題 1　255(10), 1023(10) をそれぞれ 2 進数・8 進数・16 進数に直しなさい。

問題 2　240.9375(10) を 2 進数・8 進数・16 進数に直しなさい。

問題 3　1011101011(2), 10111.01011(2) を 8 進数及び 16 進数に直しなさい。

問題 4　734571(8), 231.6767(8) を 2 進数及び 16 進数に直しなさい。

問題 5　FFA.BCD(16), 0.A32D(16) を 2 進数及び 8 進数に直しなさい。

問題 6　小数部を繰り返し 2 で掛けることで、10 進数の小数部から 2 進数の小数部へ変換される理由を考察しなさい。

● コーヒーブレイク — 数の誕生 —

数の概念からそれを記憶しておくための文字である数字が生まれるまでは、他の文字の誕生より早かったと云われており、文明の発達と密接な関係を持ってきました。現在、幅広く使用されている 10 進数は、身体の一部である指などの数を基準に数え始められたものだと言われており、「handful (両手の指の本数の意味で 10)」や handful of handful (10 掛ける 10) から「hundred (100)」のような名残が数多く残っています。また、古代インドのヒンズー人が「0」という概念を発見したことは歴史的にも重要で、その後、アラビアを経由して広まった数の表現がシンプルなアラビア数字が、世界の最もポピュラーな数字となりました。

2.3 四則演算

r 進数の足し算・引き算・掛け算・割り算は、基数が r であることに注意すれば、10 進数の場合と同じように演算することができます。すなわち、1 繰り上がりや上の位から値を借りるとき 10 進数では 10 が基準となりますが、r 進数の場合は r が基準になるということです。各演算について簡単な例を挙げておきますので、計算してみてください。

例題 1 1110.011(2)+101.11(2), 16.3(8)+5.6(8), E.6(16)+5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
    1110.011          16.3         E.6
+    101.11        +   5.6      +  5.C
--------------     --------     --------
   10100.001(2)       24.1(8)      14.2(16)
```

例題 2 1110.011(2)−101.11(2), 16.3(8)−5.6(8), E.6(16)−5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
    1110.011          16.3         E.6
−    101.11        −   5.6      −  5.C
--------------     --------     --------
    1000.101(2)       10.5(8)       8.A(16)
```

例題 3 1110.011(2)×101.11(2), 16.3(8)×5.6(8), E.6(16)×5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
         1110.011            16.3          E.6
×          101.11        ×    5.6      ×   5.C
-----------------        ---------     ---------
         11 10011           12 62         A C8
        111 0011           107 7         47 E
       1110 011          ---------     ---------
      00000 00             122.52(8)     52.A8(16)
     111001 1
-----------------
    1010010.10101(2)
```

例題 4 1110.011(2)÷101.11(2), 16.3(8)÷5.6(8), E.6(16)÷5.C(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例

```
            10.1(2)             2.4(8)            2.8(16)
        -----------          ----------         ----------
10111 ) 111001.1        56 ) 163           5C )  E6
        10111                134                 B8
        -----------          ----------         ----------
          1011                27 0               2E 0
             0                27 0               2E 0
        -----------          ----------         ----------
          1011 1                 0                  0
          1011 1
        -----------
               0
```

例題 5　1110.011(2)×10(2), 16.3(8)×100(8), E.6(16)×1000(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例　1110.011×10=11100.11(2)
16.3×100=1630(8)
E.6×1000=E600(16)

例題 6　1110.011(2)÷1000(2), 16.3(8)÷100(8), E.6(16)÷10(16) をそれぞれ計算しなさい。

解答例　1110.011÷1000=1.110011(2)
16.3÷100=0.163(8)
E.6÷10=0.E6(16)

*例題 5 や例題 6 は、10 進数の場合と同様に 0 の個数だけ小数点の位置を移動すればよい。

私達は、小学生で掛け算九九を習うなど日頃から 10 進数に慣れ親しんでおり、10 進数の四則演算をスムーズに行うことができます。しかしながら、例題のような基数が異なる数の演算は思うように計算することができません。そこで、10 進数の掛け算九九に相当する 8 進数や 16 進数の掛け算表を作成することによって計算を行う際の手助けとしましょう。

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2		4	6	10	12	14	16
3			11	14	17	22	25
4				20	24	30	34
5					31	36	43
6						44	52
7							61

表 2.5: 8 進数の掛け算表

問題 1　A =11001.111(2), B =1011.1(2) とする。$A+B$, $A-B$, $A\times B$, $A\div B$ を計算し、それぞれ 2 進数で答えなさい。

問題 2　表 2.5 の 8 進数の掛け算表を利用して234(8)×56(8), 41117(8)÷54(8) を計算し、それぞれ 8 進数で答えなさい。

問題 3 表 2.5 の 8 進数の掛け算表に習って、以下の 16 進数の掛け算表を完成させなさい。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2		4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
A															
B															
C															
D															
E															
F															

表 2.6: 16 進数の掛け算表

問題 4 表 2.6 の 16 進数の掛け算表を利用して5AC(16)×F3(16), 62986E(16)÷9BA(16) を計算し、それぞれ 16 進数で答えなさい。

● コーヒーブレイク — 九九 —

日本では、掛け算九九を言葉遊びとして用いた歌が万葉集で歌われるなど、古くから掛け算や割り算が普及していました。例としては、「二二」と書いて「し」と読ませたり、「重二」を「し」、「二五」を「とを」、「十六」を「しし」、「八十一」を「くく」などと読ませていました。

平安朝の 970 年には、源為憲という人が七歳の長男のために作った教科書の中に九九があり、いまとは逆に九九 (八十一) から始まって一一 (一) で終わっていました。その中には、「いろは歌」の先駆けというべき 47 文字の歌があり、読み書き・そろばんの原型になっています。

2.4　情報とデータ

「情報 (information)」という言葉は、現代社会において重要なキーワードのひとつとなっています。この言葉が最初に登場したのは、明治 9 年 (1876) で、フランス語の軍事用語 renseignement の訳語として、「敵情の報知 (報告)」を縮めて「情報[6]」と名付けられたとされています。その後、ラテン語で「明確な形を与えるもの」の意味の informare を語源とする information の訳語として「情報」が使われるようになりました。現在では、広辞苑などで「物事の事情, 状態についての知らせ」と説明され、必要とする人間にとって混沌としたデータの羅列ではなく明確な意味を持つものを「情報」と呼びます。すなわち、「特定の人に有用なデータ, 意味あるデータ」又は「データから取り出した意味あるもの」を示しています。

さて、これまで、「データ (data)」という言葉を断りなく使ってきましたが、上記を加味すると、この言葉は「観察等によって得た混沌とした事実」又は「処理されていない (意味づけされていない) 単なる事実」を示しています。すなわち、「情報」と「データ」には、

$$\text{「情報」} = \text{「データ」} + \text{意味}$$

という関係があり、「データ」に意味づけをしたものを「情報」と呼びます。1 章で述べたように、コンピュータは、データ (または情報) を処理してすることによって必要な結果 (意味づけされたデータ, 情報) を外部に返します。

今日では、文字・画像・音楽など様々なデータ (情報) が数値化され、コンピュータで扱うことができます。この情報を定量的に取り扱うことを初めて明確な形で提唱したのは、シャノン (C. E. Shannon, 1916–) で、1948 年に「Mathematical Theory of Communication」という情報理論に関する論文を発表しました。この論文の中で、情報量を表す単位として 2 進数 1 桁という意味を持つビット (bit: binary digit) が、初めて導入されました。

情報量　事象 A が起こる確率を $P(A)$ としたとき情報量 $I(A)$ は

$$I(A) = -\log_2 P(A)$$

によって定義されます。特に、情報科学では対数の底を 2 にとり、1 ビットの情報量で、同じ確率で起こる 2 つの事象の内どちらが起こったかを知ることができます。

例として、硬貨投げで表が出るか裏が出るかという問題を考えると、表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ ですから、表が出たことを知るための情報量は $-\log_2 \dfrac{1}{2} = 1$ ビットになります。逆に考えれば、1 ビットあれば表を 1・裏を 0 とすることで、どちらが起こったのか必要な情報を得ることができます。もう一つの例としてサイコロの問題を考えてみましょう。1 が出たことを知るための情報量は $-\log_2 \dfrac{1}{6} = 2.58$ となり、3 ビット必要になります。逆に、1 を 001, 2 を 010, 3 を 011, 4 を 100, 5 を 101, 6 を 110 にそれぞれ対応させせることによって、必要な情報が得られます。上記の 2 つの例から、n ビットでは 2^n 個の情報を得ることができ、起こる確率が小さいほど情報量は大きくなることが判ります。

[6] 当時は、「情報」と「状報」が使われていたが、明治 30 年以降には「情報」統一された。また、「情報」という言葉が一般人の目にふれるようになったのは日清戦争 (明治 27 年) の時で、戦況を伝える新聞記事に使用された。

その他の情報量を表す単位として、8 ビット (2 進数 8 桁) にをひとまとめにして扱う**バイト** (byte) があります (8bit=1byte)。さらに、バイトを基準として 8 の倍数 (8, 16, 24, $\cdots$) のビットをひとまとめにして扱う**ワード** (word) と呼ばれる単位があります。ワードは、コンピュータ内部でプログラムやデータを扱う基本単位で、コンピュータの進化と共に大きな値を取るようになり、現在では 32 ビットまたは 64 ビットが 1 ワードとなっています。なお、図 2.3 のように 1 ワードを 2 バイト (16 ビット) で表すとき、左から順に各桁を「第 15 ビット (15 ビット目)」，「第 14 ビット (14 ビット目)」, $\cdots$, 「第 0 ビット[7] (0 ビット目)」と呼び、特に、左端の第 15 ビットを**最上位ビット**、右端の第 0 ビットを**最下位ビット**と呼びます。また、最上位ビットから 8 ビット目までを上位 8 ビット、最下位ビットから 3 ビット目までを下位 4 ビットのように呼びます。

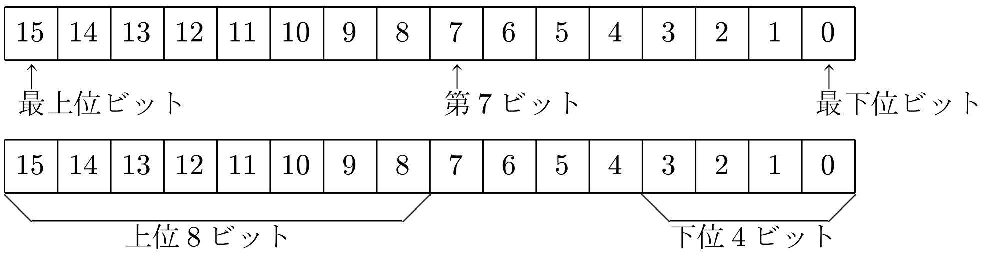

図 2.3: 1 ワードを 2 バイトとした場合

上記で述べたように、コンピュータは 1 ワードを基本単位として情報を扱います。では、逆に、この 1 ワードで表すことのできる情報を自然に整数に対応させると**いくつ**から**いくつ**までの数を表すことが出来るのでしょうか。例えば、1 ワードが 8 ビットの場合、

$$\begin{array}{ccc}
\mathtt{00000000(2)} & \longleftrightarrow & \mathtt{0} \\
\mathtt{00000001(2)} & \longleftrightarrow & \mathtt{1} \\
\mathtt{00000010(2)} & \longleftrightarrow & \mathtt{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathtt{11111110(2)} & \longleftrightarrow & \mathtt{254} \\
\mathtt{11111111(2)} & \longleftrightarrow & \mathtt{255}
\end{array}$$

のように自然に対応させることで 0 から 255 ($= 2^8 - 1$) までの整数を表わすことができます。その他に、情報科学の分野でよく用いられるビット数で表現可能な整数の範囲を表 2.7 に挙げておきます。

8 ビット	0 から255 ($= 2^8 - 1$)
16 ビット	0 から65535 ($= 2^{16} - 1$)
24 ビット	0 から16777215 ($= 2^{24} - 1$)
32 ビット	0 から4294967295 ($= 2^{32} - 1$)
64 ビット	0 から18446744073709551615 ($= 2^{64} - 1$)

表 2.7: 1 ワードで表現可能な整数の範囲

[7] 第 16 ビット, 第 15 ビット, $\cdots$, 第 1 ビットと 1 から数える場合もあるが、本テキストでは 0 から数える。

一般の場合には、組み合わせの数を考えることで、r 進法 k 桁で表現可能な整数の範囲は、

$$0 \text{ から } r^k - 1 \quad (0 \text{ から始まるため } 1 \text{ を引く})$$

までとなります。

例題 1　1 から 1000 までの数字の内、いずれの数字であるかを知るために必要な情報量を求めなさい。

解答例　$2^9(=512) < 1000 < 2^{10}(=1024)$ より、$\frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{1000} < \frac{1}{2^9}$ であるから、情報量は

$$-\log_2 \frac{1}{2^{10}} > -\log_2 \frac{1}{1000} > -\log_2 \frac{1}{2^9}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 9 = \log_2 2^9 < \log_2 1000 < \log_2 2^{10} = 10$$

となる。従って、1 から 1000 までの数字の内、いずれの数字であるかを知るためには 10 ビット必要である ($\log_2 10 = 3.321\cdots$ を知っていれば、情報量は

$$-\log_2 \frac{1}{1000} = \log_2 10^3 = 3\log_2 10 = 3 \times 3.321\cdots = 9.96\cdots$$

より、10 ビット必要であることが直ちに得られる)。

問題 1　1 から 100 までの数字の内、いずれの数字であるかを知るために必要な情報量を求めなさい。

問題 2　アルファベット (A〜Z) の内、いずれのアルファベットであるかを知るために必要な情報量を求めなさい。

問題 3　トランプ 52 $(= 13 \times 4)$ 枚の内、スペード・ダイア・ハート・クローバのいずれであるかを知るために必要な情報量を求めなさい。