2.5 補数とイクセス表現

ある基準となる決まった数から別の数を引いた数を補数 (complement) と呼び、このような数の表現方法を補数表現と呼びます。情報科学の分野では、**負の整数を正の整数で表現する**方法として用いられます。**負の r 進数 $-a$** ($a > 0$) の補数は、**k 桁の r 進数で補数表現するとき**、ある決まった正の整数 (**通常、r^k が用いられる**) に $-a$ を足すことで得られます。

例えば、ある決まった正の整数を 10 としたとき (10 進数 1 桁で補数表現すると)、10 進数 -3 の補数は、

$$10 + (-3) = 7$$

となります。言い換えると、10 進数 1 桁で補数表現された世界の 7 は -3 を意味します。同様に、

$$\begin{aligned}
&10\text{ 進数 } -1 \text{ の補数は } 10 + (-1) = 9,\\
&10\text{ 進数 } -2 \text{ の補数は } 10 + (-2) = 8,\\
&10\text{ 進数 } -3 \text{ の補数は } 10 + (-3) = 7,\\
&10\text{ 進数 } -4 \text{ の補数は } 10 + (-4) = 6,\\
&10\text{ 進数 } -5 \text{ の補数は } 10 + (-5) = 5
\end{aligned}$$

となり、10 進数 1 桁の補数表現によって -5 から -1 までの負の整数を正の整数に対応させて表現することが出来ます。すなわち、10 進数 1 桁で表現可能な正の整数 0 から 9 の内、半分が負の整数に割り当てられ、残り半分が**そのまま 0 と 1 から 4 までの正の整数に割り当てられます** (**補数表現の場合、正の整数も同じ k 桁で表示すること**)。逆に、補数表現された負の整数を元 (通常) の負の整数に戻すには、補数表現された負の整数 (補数) からある決まった正の整数を引きます。例えば、10 進数 1 桁で補数表現された負の整数 8 を元の負の整数に戻すと、

$$8 - 10 = -2$$

となります ($\because -2 = (10 - 10) - 2 = (10 - 2) - 10 = 8 - 10$)。

ここで、補数表現を使った演算について考察して観ましょう。結論から言うと、補数表現を用いると引き算を足し算として扱うことが出来ます[8]。例えば、$4 - 3$ を 10 進数 1 桁で補数表現し直して計算を行うと、

$$(4 - 3 = 4 + (-3) =)\ 4 + 7 = \underline{1}1$$

が得られます。補数表現を使った演算では、決まった桁数 (ここでは 1 桁) だけを扱うため、**下線部を無視する**ことで 1 という正しい答えが得られます。その他にも、

$$\begin{array}{rl}
3 - 1\ (= 3 + (-1)) & \text{を補数表現すると } 3 + 9 = \underline{1}2\,(= 2),\\
1 - 1\ (= 1 + (-1)) & \text{を補数表現すると } 1 + 9 = \underline{1}0\,(= 0),\\
1 - 3\ (= 1 + (-3)) & \text{を補数表現すると } 1 + 7 = \ 8\,(= -2),\\
-2 - 2\ (= (-2) + (-2)) & \text{を補数表現すると } 8 + 8 = \underline{1}6\,(= -4)
\end{array}$$

などが成り立ち、補数表現を使っても正しく演算できることがわかります。

[8] 負の整数を正の整数として、引き算を足し算として扱うことが出来ると、演算装置に減算回路が不必要 (加算回路だけで十分) となり、演算回路を単純にすることが出来ます (詳しくは 4 章で)。

理解を深めるために、他の例について観てみましょう。10 進数 3 桁で補数表現した場合 (ある決まった正の数を $1000 = 10^3$ とする)、表 2.8 のように -500 から 499 までの整数を表現することができます。正の整数と負の整数の判別は、第 3 桁が 0, 1, 2, 3, 4 であれば正の整数、5, 6, 7, 8, 9 であれば負の整数となります。同様に、2 進数 8 桁で補数表現した場合 (ある決まった正の数を $512 = 2^8$ とする)、表 2.9 (付録 A.2 参照) のように -256 から 255 までの整数を表現することができます。なお、正の整数と負の整数の判別については、10 進数に比べると容易に判断することができ、**最上位ビットが 0 であれば正の整数、1 であれば負の整数**となります。

実際の数	補数表現
-500	500
-499	501
-498	502
⋮	⋮
-3	997
-2	998
-1	999
0	000
1	001
2	002
3	003
⋮	⋮
497	497
498	498
499	499

表 2.8: 10 進数 3 桁の補数表現

実際の数	補数表現(2)
-128	10000000
-127	10000001
-126	10000010
⋮	⋮
-3	11111101
-2	11111110
-1	11111111
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
⋮	⋮
125	01111101
126	01111110
127	01111111

表 2.9: 2 進数 8 桁の補数表現

これまでのまとめとして、**負の** r 進数 $-a$ $(0 < a \leq r^k/2)$ から r 進数 k 桁の補数表現への変換は

$$r^k + (-a) = r^k - a$$

によって得られ、逆に、r 進数 k 桁で補数表現された補数 b $(= r^k - a)$ から元の負の r 進数への変換は

$$b - r^k = -(r^k - b)$$

によって得られます ($\because b - r^k = (r^k - a) - r^k = -a$)。まとめると、$r$ 進数 k 桁で補数表現された補数 0 から $r^k - 1$ の内 (**補数表現の場合、正の整数も同じ k 桁で表示すること**)、

$$\begin{cases} \dfrac{r^k}{2} \text{ から } r^k - 1 \text{ を負の整数} & \left(\text{元の整数 } -\dfrac{r^k}{2} \text{から} -1 \text{ に対応}\right), \\ \quad 0 \qquad \text{を} \qquad 0, & \\ 1 \text{ から } \dfrac{r^k}{2} - 1 \text{ を正の整数} & \left(\text{元の整数 } 1 \text{ から} \dfrac{r^k}{2} - 1 \text{ に対応}\right) \end{cases}$$

のように半分が負の整数に対応します (注意 : 演算を行う際は、上記の範囲内で行う必要がある)。

実は、補数表現には 2 種類の表現方法があって、r 進数 k 桁で補数表現するとき、これまで学習してきた **r の補数**と、ある決まった正の整数を $r^k - 1$ とした **$r - 1$ の補数**があります (本テキストでは、「補数を求めなさい」のように r の補数であるか $r - 1$ の補数であるかが省略されている場合、基本的に r の補数を指します)。r の補数と $r - 1$ の補数の間には、**負の** r 進数 $-a$ $(a > 0)$ に対して r の補数が $r^k + (-a)$ によって得られることより、

$$\Big(r^k + (-a)\Big) = r^k + (-1 + 1) + (-a) = \Big((r^k - 1) + (-a)\Big) + 1$$

のように変形することで、

$$\text{「}r\text{ の補数」} = \text{「}r - 1\text{ の補数」} + 1$$

という関係が成り立ちます。まとめると、r 進数 k 桁で補数表現された 1 の補数 0 から $r^k - 1$ の内 (**補数表現の場合、正の整数も同じ k 桁で表示すること**)、

$$\begin{cases} \dfrac{r^k}{2} \text{ から } r^k - 2 \text{ を負の整数} & \left(\text{元の整数 } -\dfrac{r^k}{2} + 1 \text{ から } -1 \text{ に対応}\right), \\ \quad r^k - 1 \qquad \text{を} \qquad -0, & \\ \quad\quad 0 \qquad\quad \text{を} \qquad +0, & \\ 1 \text{ から } \dfrac{r^k}{2} - 1 \text{ を正の整数} & \left(\text{元の整数 } 1 \text{ から } \dfrac{r^k}{2} - 1 \text{ に対応}\right) \end{cases}$$

のように**約**半分が負の整数に対応します (注意 : $r - 1$ の補数には 0 の表現方法が 2 種類存在し、「+0 (プラスのゼロ)」及び「−0 (マイナスのゼロ)」と呼ばれる)。

例として、10 進数 3 桁で補数表現すると (ある決まった正の整数を $10^3 - 1$ $(= 999)$ としたとき)、10 進数 −10 の **9 の補数**は、

$$(10^3 - 1) + (-10) = 999 - 10 = 989$$

となります。なお、

```
    999
-    10
-------
    989
```

のように記述すると、各桁ごとに引き算すればよく、繰り下がりを気にすることなく容易に計算することが出来ます。もちろん、9 の補数に 1 を足せば **10 の補数**990 $(= 989 + 1)$ になることは明らかです。**$r - 1$ の補数を求めてから 1 を足して r の補数を求めると、計算が楽な上、計算ミスが少なくなります。**

補数表現をコンピュータ上で扱う際に、**1 の補数** (付録 A.2 参照) を考えることは非常に重要な意味を持ちます。例えば、2 進数 8 桁で補数表現するとき、$-1011(2)$ の **2 の補数**は

$$100000000(2)+(-1011(2))$$

を計算しても求められますが、

$$100000000(2)+(-1011(2))+(-1(2)+1(2))=\underline{11111111(2)+(-1011(2))}+1(2)$$

のように下線部の 1 の補数を計算してから、1 を足しても求められます。ここで、1 の補数の計算

$$\begin{array}{rr} & 11111111(2) \\ - & 00001011(2) \\ \hline & 11110100(2) \end{array}$$

を注意深く観察すると、11110100(2) は00001011(2) の0 と1 をひっくり返す操作を行うだけで得られることがわかります。3 章で詳しく述べますが、1 の補数の計算は、論理演算の否定と全く同じ働きをしています[9]。

例題 1　10 進数 4 桁で補数表現するとき、$-123(10)$ について 10 の補数および 9 の補数を求めなさい。

解答例　10 の補数　10000−123=9877(10)
　　　　9 の補数　9999−123=9876(10)

例題 2　2 進数 8 桁で補数表現するとき、$-1010100(2)$ について 2 の補数および 1 の補数を求めなさい。

解答例　2 の補数　100000000−1010100=10101100(2)
　　　　1 の補数　11111111−1010100=10101011(2)

例題 3　2 進数 8 桁で補数表現された 2 の補数10101001(2) を元の 2 進数に直しなさい。

解答例　10101001−100000000= −(100000000−10101001)= −1010111(2)

例題 4　2 進数 8 桁で補数表現された 1 の補数10101001(2) を元の 2 進数に直しなさい。

解答例　10101001−11111111= −(11111111−10101001)= −1010110(2)

[9] 最終的には、四則演算を論理演算で再構築し、論理回路で実現します。

補数表現の類似として、**イクセス表現**[10] (excess expression) と呼ばれる数の表現方法があります。イクセス表現は、全ての整数に**バイアス** (bias) と呼ばれるある決まった正の整数を一様に足して数を表現します (イクセス表現も全てゼロと正の整数に対応させて数を表現します)。この表現方法の利点は、**正の数・ゼロ・負の数に関係なく元の数の大小関係を容易に判別できるという利点を持っています**。以下、**k 桁の r 進数でイクセス表現するとき**、話を簡単にするためにバイアスを $\frac{r^k}{2}$ として話を進めていきます[11]。r 進数 a を**k 桁の r 進数でイクセス表現**するには、

$$a + \frac{r^k}{2}$$

を計算します。ただし、イクセス表現された数はゼロと正の整数に対応させることから、a の範囲は

$$-\frac{r^k}{2} \le a \le \frac{r^k}{2} - 1$$

となり、イクセス表現された a の範囲は

$$0 \le a \le r^k - 1$$

となります。逆に、r 進数 k 桁でイクセス表現された数 b $(= a + \frac{r^k}{2})$ から元の整数への変換は

$$b - \frac{r^k}{2}$$

によって得られます。まとめると、バイアスが $\frac{r^k}{2}$ のとき、r 進数 k 桁でイクセス表現された数 0 から $r^k - 1$ の内、

$$\begin{cases} \quad 0 \quad \text{から}\ \dfrac{r^k}{2} - 1\ \text{を負の整数} & \left(\text{元の整数}\ -\dfrac{r^k}{2}\ \text{から}\ -1\ \text{に対応}\right), \\ \qquad \dfrac{r^k}{2} \qquad\quad \text{を} \qquad 0, & \\ \dfrac{r^k}{2} + 1\ \text{から}\ r^k - 1\ \text{を正の整数} & \left(\text{元の整数}\ 1\ \text{から}\ \dfrac{r^k}{2} - 1\ \text{に対応}\right) \end{cases}$$

のように半分が負の整数に対応します。

例として、バイアスを $\frac{10^3}{2}$ $(= 500)$ とした 10 進数 3 桁のイクセス表現を表 2.10 にバイアスを $\frac{2^8}{2}$ $(= 128)$ とした 2 進数 8 桁のイクセス表現を表 2.11 に挙げておきます (付録 A.2 は、バイアスを $\frac{2^8}{2} - 1$ $(= 127)$ で算出した値で、単精度 IEEE754 形式に対応しています。)。

[10] ある決まった正の数を一様に足すことで数を底上げして表示することから、「下駄履き表現」とも呼ばれます。この表示方法は 2.7 節の浮動小数点表示の指数部を表示するのに用いられます。

[11] 2.7 節の浮動小数点数 (IEEE754 形式) で用いられるイクセス表現のバイアスは $\frac{r^k}{2} - 1$ で算出します。

実際の数	補数表現	イクセス表現
-500	500	000
-499	501	001
-498	502	002
⋮	⋮	⋮
-3	997	497
-2	998	498
-1	999	499
0	000	500
1	001	501
2	002	502
3	003	503
⋮	⋮	⋮
497	497	997
498	498	998
499	499	999

表 2.10: 10 進数 3 桁のイクセス表現

実際の数	補数表現 (2)	イクセス表現 (2)
-128	10000000	00000000
-127	10000001	00000001
-126	10000010	00000010
⋮	⋮	⋮
-3	11111101	01111101
-2	11111110	01111110
-1	11111111	01111111
0	00000000	10000000
1	00000001	10000001
2	00000010	10000010
3	00000011	10000011
⋮	⋮	⋮
125	01111101	11111101
126	01111110	11111110
127	01111111	11111111

表 2.11: 2 進数 8 桁のイクセス表現

例題 5 123(10) を 10 進数 4 桁でイクセス表現しなさい。ただし、バイアスは $\frac{10^4}{2}$ $(= 5000)$ とする。

解答例　123(10) $+ \frac{10^4}{2} =$ 123(10) + 5000(10) = 5123(10)

例題 6 −123(10) を 10 進数 4 桁でイクセス表現しなさい。ただし、バイアスは $\frac{10^4}{2}$ $(= 5000)$ とする。

解答例　−123(10) $+ \frac{10^4}{2} =$ −123(10) + 5000(10) = 4877(10)

例題 7 101001(2) を 2 進数 8 桁でイクセス表現しなさい。ただし、バイアスは $\frac{2^8}{2}$ $(= 128)$ とする。

解答例　101001(2) $+ \frac{2^8}{2} =$ 00101001(2) + 10000000(2) = 10101001(2)

例題 8 −101001(2) を 2 進数 8 桁でイクセス表現しなさい。ただし、バイアスは $\frac{2^8}{2} - 1$ $(= 127)$ とする。

解答例　−101001(2) $+ \left(\frac{2^8}{2} - 1\right) =$ −101001(2) + 1111111(2) = 01010110(2)

例題 9　2 進数 8 桁でイクセス表現された数`10101010(2)`を元の 2 進数に戻しなさい。ただし、バイアスは $\frac{2^8}{2}$ (= 128) とする。

解答例　$\texttt{10101010(2)} - \frac{2^8}{2} = \texttt{10101010(2)} - \texttt{10000000(2)} = \texttt{101010(2)}$

問題 1　10 進数 8 桁で補数表現するとき、−`123(10)`を 1 の補数と 2 の補数で表しなさい。

問題 2　4 進数 4 桁で補数表現するとき、−`123(4)`を 3 の補数と 4 の補数で表しなさい。

問題 3　2 進数 16 桁で補数表現するとき、−`1000(10)`を 2 進数に直し、2 の補数で表しなさい。

問題 4　2 進数 16 桁で補数表現された 2 の補数`1111000011110000(2)`を元の 2 進数に直し、10 進数で答えなさい。

問題 5　2 進数 16 桁で補数表現された 1 の補数`1111000011110000(2)`を元の 2 進数に直し、10 進数で答えなさい。

問題 6　`123(4)`を 4 進数 4 桁でイクセス表現しなさい。ただし、バイアスは $\frac{4^4}{2}$ とする。

問題 7　−`10111(2)`を 2 進数 8 桁でイクセス表現しなさい。ただし、バイアスは $\frac{2^8}{2} - 1$ とする。

問題 8　2 進数 8 桁でイクセス表現された数`01010101(2)`を元の 2 進数に戻し、10 進数で答えなさい。ただし、バイアスは $\frac{2^8}{2} - 1$ とする。

問題 9　10 進数 4 桁でイクセス表現された数`1234(4)`を元の 10 進数に戻しなさい。ただし、バイアスは $\frac{10^4}{2}$ とする。