プログラミング演習II 期末テスト (その1)

実施日：2002年2月18日

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　氏名：

連立1次方程式

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad Ax = b$$

$$\text{ただし}\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が唯一の解をもつとき、ガウス-ジョルダン法を用いて解を求めるプログラムを作成したい。なお、行列 A は前進消去でピボット選択を行わなくても正しい近似値が求められる行列とし、作成したプログラムを少し変更すれば、クラウト法のように行列 b と異なる $b', b'', \cdots$ を与えても前進消去が1回ですむように設計する。以下の問いに答えて、プログラムを完成させなさい。

問 1. ①から④の空欄を埋め、(1),(2),(3) の行基本変形と一致する基本行列をそれぞれ求めなさい。(5点× 3)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \boxed{\text{①}} & & & & \boxed{\text{②}} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \boxed{\text{③}} & & & & \boxed{\text{④}} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) 第 i 行を α 倍する。

① α	② 0	③ 0	④ 1

(2) 第 i 行と第 j 行を交換する。

① 0	② 1	③ 1	④ 0

(3) 第 i 行を β 倍し、第 j 行に加える。

① 1	② 0	③ β	④ 1

行列 A の成分 a_{ij} を $a_{ij}^{(0)}$ で表すと、問1より

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}^{(0)} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}^{(0)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

によって

$$R_1 A = R_1 \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & \cdots & a_{3n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & a_{n3}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

となる。

プログラミング演習II 期末テスト (その2)

実施日：2002 年 2 月 18 日

学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：

同様に、$R_2, R_3, \cdots, R_n$ を左から順に施すと

$$R_n R_{n-1} \cdots R_1 A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、改めて $P_m = R_m R_{m-1} \cdots R_1 R_0 = \left(p_{ij}^{(m)}\right), Q_m = P_m A = \left(q_{ij}^{(m)}\right)$ とおく (R_0 は $n \times n$ の単位行列)。

問 2.　行列 P_n, Q_n を一度計算し記憶しておけば、b の値を変えても行列 A に対して繰り返し前進消去を実行しないで済む。行列 P_m, Q_m に対して、R_{m+1} に相当する問 1 の (1) と (3) を施したとき、$p_{ij}^{(m+1)}, q_{ij}^{(m+1)}$ の関係式として正しいものを選択肢から選び、アからコの記号で答えなさい。(5 点× 5)

(1) 第 $i\ (= m+1)$ 行に対して、第 i 行を $p_{ii}^{(m)}$ で割る。

$$p_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} 0 & (1 \le j < i) \\ 1 & (j = i) \\ \boxed{\text{コ}} & (i < j \le n) \end{cases} \qquad q_{ij}^{(m+1)} = \begin{cases} q_{ij}^{(m)}/p_{ii}^{(m)} & (1 \le j < i) \\ \boxed{\text{ウ}} & (j = i) \\ 0 & (i < j \le n) \end{cases}$$

(3) 第 k 行に対して、第 k 行から $p_{ki}^{(m)}$ 倍した第 $i\ (= m+1)$ 行を引く $(i+1 < k \le n)$。

$$p_{kj}^{(m+1)} = \begin{cases} 0 & (1 \le j < i) \\ \boxed{\text{ケ}} & (j = i) \\ \boxed{\text{イ}} & (i < j \le n) \end{cases} \qquad q_{kj}^{(m+1)} = \begin{cases} q_{kj}^{(m)} - p_{ki}^{(m)} q_{ij}^{(m+1)} & (1 \le j < i) \\ \boxed{\text{キ}} & (j = i) \\ 0 & (i < j \le n) \end{cases}$$

選択肢					
	ア 1	イ $p_{kj}^{(m)} - p_{ki}^{(m)} p_{ij}^{(m+1)}$	ウ $1/p_{ii}^{(m)}$	エ $p_{kj}^{(m)} - p_{ki}^{(m+1)} p_{ij}^{(m+1)}$	オ $q_{kj}^{(m)} - q_{ki}^{(m)} q_{ij}^{(m+1)}$
	カ $1/q_{ii}^{(m)}$	キ $-p_{ki}^{(m)} q_{ii}^{(m+1)}$	ク $-1/q_{ii}^{(m)}$	ケ 0	コ $p_{ij}^{(m)}/p_{ii}^{(m)}$

行列 R_1 を掛け終わった行列 P_1, Q_1 を注意深く観察すると、$q_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)}$ $(2 \le i \le n, 2 \le j \le n)$ である。また、一時的に $q_{11}^{(0)} (= a_{11}^{(0)})$ を記憶すれば、$q_{12}^{(1)}, q_{13}^{(1)}, \cdots, q_{1n}^{(1)}$ を求めるとき、一度しか $q_{12}^{(0)}, q_{13}^{(0)}, \cdots, q_{1n}^{(0)}$ を使用しない。同様に、一時的に $p_{k1}^{(0)}$ $(2 \le k \le n)$ を記憶すれば、$p_{21}^{(1)}, q_{31}^{(1)}, \cdots, q_{n1}^{(1)}$ を求めるとき、一度しか $p_{12}^{(0)}, q_{13}^{(0)}, \cdots, q_{1n}^{(0)}$ を使用しない。

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21}^{(1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{31}^{(1)} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & q_{12}^{(1)} & q_{13}^{(1)} & \cdots & q_{1n}^{(1)} \\ 0 & q_{22}^{(1)} & q_{23}^{(1)} & \cdots & q_{2n}^{(1)} \\ 0 & q_{32}^{(1)} & q_{33}^{(1)} & \cdots & q_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_{n2}^{(1)} & q_{n3}^{(1)} & \cdots & q_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_{12}^{(1)} & q_{13}^{(1)} & \cdots & q_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

次に、上の手順に従って行列 R_2 を行列 P_1, Q_1 に施すと、行列 P_2, Q_2 は以下のようになる。

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(2)} & p_{n2}^{(2)} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & q_{12}^{(1)} & q_{13}^{(1)} & \cdots & q_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & q_{23}^{(2)} & \cdots & q_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & q_{33}^{(2)} & \cdots & q_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & q_{n3}^{(2)} & \cdots & q_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_{12}^{(1)} & q_{13}^{(1)} & \cdots & q_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & q_{23}^{(2)} & \cdots & q_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

プログラミング演習II 期末テスト (その3)

実施日：2002 年 2 月 18 日

学籍番号：　　　　　　　　　　　氏名：

以上の考察から、行列 P_m, Q_m に対して R_{m+1} に相当する問 1 の (1) と (3) を施すと、成分の変化する範囲が限られていることがわかる。より詳しく述べれば、P_m の ij 成分 $(m+1 \le i \le n, 0 \le j \le m+1)$ 及び Q_m の ij 成分 $(m+1 \le i \le n, m+1 \le j \le n)$ が変化するだけで、他の成分には影響しない。また、$a^{(m)}_{m+1j}$ $(m+2 \le j \le n)$ 及び $a^{(m)}_{km+1}$ $(m+2 \le k \le n)$ は一度しか使用されない。そこで、クラウト法と同じようにメモリを節約でき、前進消去を完了した時点で行列 A は以下のようになる。

$$A = A_n = \begin{pmatrix} p^{(1)}_{11} & q^{(1)}_{12} & q^{(1)}_{13} & \cdots & q^{(1)}_{1n} \\ p^{(2)}_{21} & p^{(2)}_{22} & q^{(2)}_{23} & \cdots & q^{(2)}_{2n} \\ p^{(3)}_{31} & p^{(3)}_{32} & p^{(3)}_{33} & \cdots & q^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{(n)}_{n1} & p^{(n)}_{n2} & p^{(n)}_{n3} & \cdots & p^{(n)}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & \cdots & a^{(1)}_{1n} \\ a^{(2)}_{21} & a^{(2)}_{22} & a^{(2)}_{23} & \cdots & a^{(2)}_{2n} \\ a^{(3)}_{31} & a^{(3)}_{32} & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{(n)}_{n1} & a^{(n)}_{n2} & a^{(n)}_{n3} & \cdots & a^{(n)}_{nn} \end{pmatrix}$$

問 3. 行列 R_{m+1} に相当する問 1 の (1) と (3) を行列 P_m, Q_m に対応する行列

$$A_m = \begin{pmatrix} a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & \cdots & a^{(1)}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{(m-1)}_{m-11} & a^{(m-1)}_{m-12} & a^{(m-1)}_{m-13} & \cdots & a^{(m-1)}_{m-1n} \\ a^{(m)}_{m1} & a^{(m)}_{m2} & a^{(m)}_{m3} & \cdots & a^{(m)}_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{(m)}_{n1} & a^{(m)}_{n2} & a^{(m)}_{n3} & \cdots & a^{(m)}_{nn} \end{pmatrix}$$

に施したとき、$a^{(m+1)}_{ij}$ の関係式として正しいものを選択肢から選び、アからコの記号で答えなさい。(5 点× 4)

(1) 第 i $(= m+1)$ 行に対して、第 i 行を $a^{(m)}_{ii}$ で割る。

$$a^{(m+1)}_{ij} = \begin{cases} \boxed{\text{コ}} & (1 \le j \le n, i \ne j) \\ \boxed{\text{ウ}} & (j = i) \end{cases}$$

(3) 第 k 行に対して、第 k 行から $a^{(m)}_{ki}$ 倍した第 i $(= m+1)$ 行を引く $(i+1 < k \le n)$。

$$a^{(m+1)}_{kj} = \begin{cases} \boxed{\text{カ}} & (1 \le j \le n, i \ne j) \\ \boxed{\text{イ}} & (j = i) \end{cases}$$

$\boxed{\text{選択肢}}$　ア $a^{(m)}_{kj} - a^{(m+1)}_{ki} a^{(m+1)}_{ij}$　イ $-a^{(m)}_{ki} a^{(m+1)}_{ii}$　ウ $1/a^{(m)}_{ii}$　エ 1　オ $a^{(m+1)}_{kj} - a^{(m)}_{ki} a^{(m)}_{ij}$

カ $a^{(m)}_{kj} - a^{(m)}_{ki} a^{(m+1)}_{ij}$　キ $-a^{(m+1)}_{ki} a^{(m)}_{ii}$　ク $-1/a^{(m)}_{ii}$　ケ 0　コ $a^{(m)}_{ij}/a^{(m)}_{ii}$

前進消去によって、連立 1 次方程式 $Ax = b$ は $Q_n x = P_n b$ と変形される。$y = P_n b$ とおくと、後退代入を実行する前に $y = (y_i)$ を計算する必要がある。

問 4. 前進消去完了後の行列 P_n, Q_n に相当する行列 A_n の成分を改めて a_{ij} とする。y_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を A, b の成分で、x_i $(i = n, n-1, \cdots, 1)$ を A, y, x の成分で、それぞれ $\sum$ 記号を使って最も簡潔な形で表しなさい。(5 点× 2)

$y_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} b_j$	$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j$

プログラミング演習II 期末テスト (その4)

実施日：2002年2月18日

学籍番号：　　　　　　　　　氏名：

問 5.　以下のプログラムは、これまでの考察を利用して、連立1次方程式

$$\begin{cases} 8x_1 + 16x_2 + 24x_3 + 32x_4 = 160 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 17x_4 = 70 \\ 6x_1 + 17x_2 + 32x_3 + 59x_4 = 198 \\ 7x_1 + 22x_2 + 46x_3 + 105x_4 = 291 \end{cases}$$

の解をガウス-ジョルダン法によって求めるプログラムである。①から⑤の空欄を埋め、プログラムを完成しなさい。また、プログラムと同じ手順でa[][] に相当する行列 A を求めなさい。(5点× 6)

プログラム

```
#include <stdio.h>

main(){
    double a[4][4]={{8,16,24,32},{2,7,12,17},{6,17,32,59},{7,22,46,105}};
    double b[4]={160,70,198,291}, x[4], y[4], tmp;
    int n=4, i, j, k;

    for(i=0;i<n;i++){
        tmp=a[i][i];
        for(j=0;j<n;j++) [①                              ];
        a[i][i]=1/tmp;
        for(k=i+1;k<n;k++){
            tmp=a[k][i];
            for(j=0;j<n;j++) [②                              ];
            [③                              ];
        }
    }
    for(i=0;i<n;i++){
        [④                              ];
        for(j=0;j<=i;j++) y[i]=y[i]+a[i][j]*b[j];
    }
    for(i=n;i>=0;i--){
        x[i]=y[i];
        for(j=i+1;j<n;j++) [⑤                              ];
    }
}
```

①	a[i][j]=a[i][j]/tmp
②	a[k][j]=a[k][j]-a[i][j]*tmp
③	a[k][i]=-a[i][i]*tmp
④	y[i]=0
⑤	x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 2 & 3 & 4 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 2 & 3 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{4} & 5 \\ \frac{13}{192} & \frac{13}{96} & \frac{-9}{32} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$