

2012年度 情報数理 レポート5 学生用

学籍番号： _____ 氏名： _____

下記の注意事項を守り、次ページ以降の問いに答え、レポートを完成させなさい。

提出期限： 2012年12月19日(水) 15:00まで
提出場所： 理学部棟 正面玄関内に設置のレポートボックス

注意事項：

- (1) このページを印刷し、必要事項を記入の上(学籍番号欄と氏名欄は2箇所あるので忘れずに記入すること)、レポートの表紙として提出すること。
- (2) ~~文章処理ソフトウェアや図形処理ソフトウェア等を駆使してレポートを作成し(問→解答→問→解答→…の順になるように記述すること)、A4サイズの内紙に印刷して提出すること(手書きは不可)。~~
- (3) クラスメイトのレポートを参考にしたり、クラスメイトと協力してレポートを作成した場合は、教員控の協力者氏名欄にクラスメイトの氏名を記入すること。これらの場合も、自分の言葉で表現し直すこと。**コピー禁止。**
- (4) 情報数理について、あなたの声を聞かせてください(教員控の意見・質問欄に記入のこと)。気軽にどうぞ(成績には一切影響しません)。

出題者： 幸山 直人
出題日： 2012年12月7日(金)

得点：	/6
-----	----

----- 切り取り線 -----

2012年度 情報数理 レポート5 教員控

学籍番号： _____ 氏名： _____

協力者氏名： _____ , _____ , _____

レポート作成に要した時間： _____ . _____ 時間

得点：	/6
-----	----

意見・質問：

問 1 2元符号 $GF(2) = \{0, 1\}$ 上の情報 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ に対する検査ビット $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ を関係式

$$\begin{cases} p_1 = i_1 + i_2 + i_3 \\ p_2 = i_1 \\ p_3 = i_2 \\ p_4 = i_3 \\ p_5 = i_1 + i_2 + i_3 \end{cases}$$

で与え、符号語が $\mathbf{x} = (i_1, i_2, i_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ となる $[8,3]$ 線形符号を構成する。この線形符号について、次の (1)~(5) の問いに答えなさい。

(1) この符号の生成行列 G および検査行列 H を求めなさい。(1点×2)

解答例 定義より、直ちに

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る。

評価基準 解答例に準じた解答であれば各1点。

(2) 以下の空欄を埋め、この符号の符号語 \mathbf{x}_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) を全て求めなさい。(1点)

解答例 i_1, i_2, i_3 を変数 (パラメータ) とし、関係式

$$\begin{cases} p_1 = i_1 + i_2 + i_3 \\ p_2 = i_1 \\ p_3 = i_2 \\ p_4 = i_3 \\ p_5 = i_1 + i_2 + i_3 \end{cases}$$

を計算することで、直ちに符号語 \mathbf{x}_j が得られる。

注意: i_1, i_2, i_3 は、それぞれ 0 または 1 の値をとる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{x}_1 &= (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1), & \mathbf{x}_2 &= (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1), \\ \mathbf{x}_3 &= (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0), & \mathbf{x}_4 &= (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), & \mathbf{x}_5 &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), \\ \mathbf{x}_6 &= (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0), & \mathbf{x}_7 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

評価基準 解答例に準じた解答であれば1点。

(3) この符号の最小距離 d_{\min} を求めなさい。(1点)

解答例 1 テキストの48ページの「2元符号の場合、2つの異なる符号語間のハミング距離は、それら符号語の和 (排他的論理和) によって得られるベクトルに含まれる1の個数と一致します。さらに、線形符号では符号語の和は再び符号語になります。したがって、零ベクトルでない符号語に含まれる1の個数の最小値が最小距離に一致します。」より、符号語 \mathbf{x}_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) に含まれる1の個数は4個が最小である。したがって、最小距離 $d_{\min} = 4$ である。

解答例 2 異なる符号語 $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$ ($j \neq k$) に対して、それぞれ $d_H(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ を求めると

d_H	\mathbf{x}_0	\mathbf{x}_1	\mathbf{x}_2	\mathbf{x}_3	\mathbf{x}_4	\mathbf{x}_5	\mathbf{x}_6	\mathbf{x}_7
\mathbf{x}_0		4	4	4	4	4	4	8
\mathbf{x}_1			4	4	4	4	8	4
\mathbf{x}_2				4	4	8	4	4
\mathbf{x}_3					8	4	4	4
\mathbf{x}_4						4	4	4
\mathbf{x}_5							4	4
\mathbf{x}_6								4
\mathbf{x}_7								

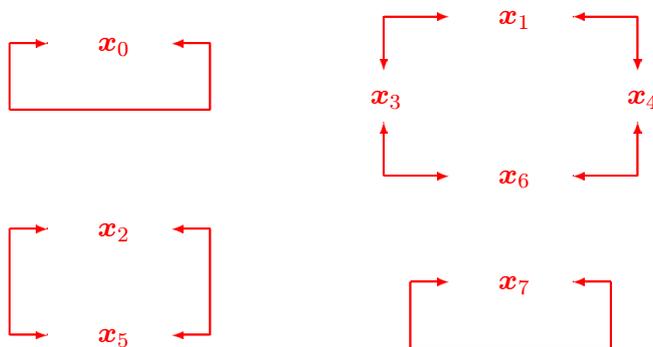
となる。したがって、最小距離 $d_{\min} = 4$ である。

注意: 1個の誤りであれば訂正可能であるが、2個の誤りであれば検出のみ可能で訂正はできない。

評価基準 解答例に準じた解答であれば1点。

(4) この符号が巡回符号であることを示しなさい。(1点)

解答例 (2) で求めた符号語をそれぞれ巡回置換すると下図の関係が得られ、直ちに巡回符号であることが示される。



。

評価基準 解答例に準じた解答であれば1点。

(5) この符号が $G(x) = 1 + x + x^4 + x^5$ を生成多項式とする [8,3] 巡回符号と同値な符号であることを証明しなさい。(1点)

解答例 巡回符号の定義より、符号語 \mathbf{x}' は

$$\mathbf{x}' = (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, i'_0, i'_1, i'_2)$$

となり (テキストの 57 ページ)、検査行列 H' は

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる (テキストの 58 ページ)。このとき、符号語 \mathbf{x}' は $\mathbf{x}'H'^T = \mathbf{0}$ を満たすから、関係式

$$\begin{cases} p'_0 + i'_0 + i'_1 + i'_2 = 0 \\ p'_1 + i'_0 = 0 \\ p'_2 + i'_1 = 0 \\ p'_3 + i'_2 = 0 \\ p'_4 + i'_0 + i'_1 + i'_2 = 0 \end{cases} \cdots (*1) \iff \begin{cases} p'_0 = i'_0 + i'_1 + i'_2 \\ p'_1 = i'_0 \\ p'_2 = i'_1 \\ p'_3 = i'_2 \\ p'_4 = i'_0 + i'_1 + i'_2 \end{cases} \cdots (*2)$$

を得る。したがって、上記の関係式 (*2) が [8,3] 線形符号の関係式と一致することより、この [8,3] 巡回符号は [8,3] 線形符号と同値な符号となる (p'_k は p_{k+1} で、 i'_j は i_{j+1} で、それぞれ読み換える)。

注意 1: 巡回符号の検査行列は線形符号の検査行列の列を入れ替えたもの (列に関する基本変形) だから、(*1) より

$$\begin{cases} i'_0 + i'_1 + i'_2 + p'_0 = 0 \\ i'_0 + p'_1 = 0 \\ i'_1 + p'_2 = 0 \\ i'_2 + p'_3 = 0 \\ i'_0 + i'_1 + i'_2 + p'_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_0 \\ i'_1 \\ i'_2 \\ p'_0 \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ p'_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\left(\iff H\mathbf{x}'^T = \mathbf{0} \text{ (} H' \text{ではないことに注意)} \iff (H\mathbf{x}'^T)^T = \mathbf{0}^T \iff \mathbf{x}'H^T = \mathbf{0}^T \right)$$

とし (上記のように並び順を変えて)、検査行列が一致することを示しても良い。

注意 2: 巡回符号の検査行列 H' によって得られる解集合と線形符号の検査行列 H によって得られる解集合が一致することを示しても良い ($\mathbf{x}'H'^T = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}'H^T = \mathbf{0}$)。

注意 3: 巡回符号であれば必ず線形符号となるが、線形符号だからといって必ず巡回符号になるとは限らない。

評価基準 解答例に準じた解答であれば 1 点。