

2013 年度 プログラミング I 練習問題 05

学籍番号： _____

氏名： _____

質問がある場合は、以下の注意事項を守り、

提出期限： 2013 年 5 月 29 日 (水) 15:00 までに

提出場所： 理学部 B 棟 2 階 幸山研究室 (B231 室)

の前に設置してある「質問箱 (提出用)」に、質問事項を記入し提出してください。
2 日～3 日後を目処に質問に対する回答を行い、「質問箱 (返却用)」に返却いたします。

注意事項：

- (1) 練習問題の提出は必修ではありません。質問がある場合のみ提出してください。
- (2) このページを印刷し、学籍番号・氏名を記入の上、質問事項の表紙として提出してください。
- (3) 解答は式の羅列ではなく、文章になるように記述してください。解答例を参照のこと。
- (4) 質問内容は明確に記入してください。

なお、授業に対する意見・質問等も受け付けています (成績には一切影響しません)。

授業に対する意見・質問等 (記入欄)：

出題者： 幸山 直人
出題日： 2013 年 5 月 15 日 (水)

問 1 次の (1)～(4) の論理式を否定論理和 ($\downarrow$) のみで表しなさい。ただし、括弧は使ってよい。

(1) $\overline{A}$

解答例

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{A + A} & (\because A + A = A) \\ &= A \downarrow A\end{aligned}$$

(2) $A + B$

解答例

$$\begin{aligned}A + B &= \overline{\overline{A + B}} & (\because \overline{\overline{A}} = A) \\ &= \overline{A \downarrow B} \\ &= (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) & (\because (1) \text{ より})\end{aligned}$$

(3) $A \cdot B$

解答例

$$\begin{aligned}A \cdot B &= \overline{\overline{A \cdot B}} & (\because \overline{\overline{A}} = A) \\ &= \overline{\overline{A} + \overline{B}} & (\because \text{ド・モルガンの定理}) \\ &= \overline{\overline{A} \downarrow \overline{B}} \\ &= (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) & (\because (1) \text{ より})\end{aligned}$$

(4) $\overline{A} \cdot B$

解答例

$$\begin{aligned}\overline{A} \cdot B &= \overline{\overline{\overline{A} \cdot B}} & (\because \overline{\overline{A}} = A) \\ &= \overline{\overline{\overline{A} + \overline{B}}} & (\because \text{ド・モルガンの定理}) \\ &= \overline{A + \overline{B}} & (\because \overline{\overline{A}} = A) \\ &= A \downarrow \overline{B} \\ &= A \downarrow (B \downarrow B) & (\because (1) \text{ より})\end{aligned}$$

問 2 論理演算に関する等式 $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$ を証明しなさい。

解答例 真理値表を描くことで証明を完了する。

A	B	C	$A + B$	$\overline{A} + C$	$(A + B) \cdot (\overline{A} + C)$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot C$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot C$
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1

問 3 論理演算に関する等式 $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = \overline{A} \cdot B + A \cdot C$ を、論理演算の基本公式 (p.44) を用いて証明しなさい。

解答例 交換律と結合律については断りなく使用する。

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= A \cdot \overline{A} + A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C & (\because \text{分配律より}) \\
 &= 0 + A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C & (\because A \cdot \overline{A} = 0) \\
 &= A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C & (\because A + 0 = A) \\
 &= A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C \cdot 1 & (\because A \cdot 1 = A) \\
 &= A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C \cdot (A + \overline{A}) & (\because A + \overline{A} = 1) \\
 &= A \cdot C + \overline{A} \cdot B + B \cdot C \cdot A + B \cdot C \cdot \overline{A} & (\because \text{分配律より}) \\
 &= (A \cdot C \cdot 1 + A \cdot C \cdot B) + (\overline{A} \cdot B \cdot 1 + \overline{A} \cdot B \cdot C) & (\because A \cdot 1 = A) \\
 &= A \cdot C \cdot (1 + B) + \overline{A} \cdot B \cdot (1 + C) & (\because \text{分配律より}) \\
 &= A \cdot C \cdot 1 + \overline{A} \cdot B \cdot 1 & (\because A + 1 = 1) \\
 &= A \cdot C + \overline{A} \cdot B & (\because A \cdot 1 = A) \\
 &= (\text{右辺})
 \end{aligned}$$

問 4 論理演算に関する等式 $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot \overline{A} = A \cdot B + C \cdot \overline{A}$ を証明しなさい。

解答例 真理値表を描くことで証明を完了する。

A	B	C	$\overline{A}$	$A \cdot B$	$B \cdot C$	$C \cdot \overline{A}$	$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot \overline{A}$	$A \cdot B + C \cdot \overline{A}$
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1

別解 (論理演算の基本公式を用いて、以下のように証明できる。)

$$\begin{aligned}
 & A \cdot B + B \cdot C + C \cdot \overline{A} \\
 &= A \cdot B + B \cdot C \cdot 1 + C \cdot \overline{A} && (\because A \cdot 1 = A) \\
 &= A \cdot B + B \cdot C \cdot (A + \overline{A}) + C \cdot \overline{A} && (\because A + \overline{A} = 1) \\
 &= A \cdot B + A \cdot B \cdot C + B \cdot C \cdot \overline{A} + C \cdot \overline{A} && (\because \text{分配律, 交換律}) \\
 &= A \cdot B \cdot 1 + A \cdot B \cdot C + B \cdot C \cdot \overline{A} + C \cdot \overline{A} && (\because A \cdot 1 = A) \\
 &= A \cdot B \cdot (1 + C) + (B + 1) \cdot C \cdot \overline{A} && (\because \text{分配律}) \\
 &= A \cdot B \cdot 1 + 1 \cdot C \cdot \overline{A} && (\because A + 1 = 1) \\
 &= A \cdot B + C \cdot \overline{A} && (\because A \cdot 1 = A)
 \end{aligned}$$

問 5 論理演算に関する等式 $\overline{A} + B = 1$ かつ $\overline{A} \cdot B = 0$ が成り立つとき、論理演算に関する等式 $A = B$ を示しなさい。

解答例

$$\begin{aligned}
 A &= A \cdot 1 + 0 && (A + 0 = A, A \cdot 1 = A) \\
 &= A \cdot (\overline{A} + B) + (\overline{A} \cdot B) && (\text{条件より}) \\
 &= A \cdot \overline{A} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B && (\text{分配律}) \\
 &= A \cdot B + \overline{A} \cdot B && (A \cdot \overline{A} = 0, A + 0 = A) \\
 &= (A + \overline{A}) \cdot B && (\text{分配律}) \\
 &= 1 \cdot B && (A + \overline{A} = 1) \\
 &= B && (A \cdot 1 = A)
 \end{aligned}$$

問 6 以下の表は、否定論理積 (|) のみで最小万能演算系となることを示唆するものである。空欄を埋め表を完成しなさい。ただし、命題変数 A, B および括弧は使用してもよい。

命題変数 A	0	0	1	1	
命題変数 B	0	1	0	1	否定論理積のみで記述された論理関数
$F_0(A, B)$	0	0	0	0	0
$F_1(A, B)$	0	0	0	1	$(A B) (A B)$
$F_2(A, B)$	0	0	1	0	$\{A (B B)\} \{A (B B)\}$
$F_3(A, B)$	0	0	1	1	A
$F_4(A, B)$	0	1	0	0	$\{(A A) B\} \{(A A) B\}$
$F_5(A, B)$	0	1	0	1	B
$F_6(A, B)$	0	1	1	0	$\{A (B B)\} \{(A A) B\}$
$F_7(A, B)$	0	1	1	1	$(A A) (B B)$
$F_8(A, B)$	1	0	0	0	$\{(A A) (B B)\} \{(A A) (B B)\}$
$F_9(A, B)$	1	0	0	1	$\{(A A) (B B)\} (A B)$
$F_{10}(A, B)$	1	0	1	0	$B B$
$F_{11}(A, B)$	1	0	1	1	$(A A) B$
$F_{12}(A, B)$	1	1	0	0	$A A$
$F_{13}(A, B)$	1	1	0	1	$A (B B)$
$F_{14}(A, B)$	1	1	1	0	$A B$
$F_{15}(A, B)$	1	1	1	1	1

解答例

$$F_1(A, B) = A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{A | B} = \overline{(A | B) \cdot (A | B)} = (A | B) | (A | B)$$

$$F_6(A, B) = A \oplus B = \overline{\overline{A \cdot B} + \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}} = \overline{A \cdot B} | \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = (A | B) | (\overline{A} | \overline{B}) \\ = \{A | (B | B)\} | \{(A | A) | B\}$$

$$F_7(A, B) = A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{A} | \overline{B} = (A | A) | (B | B)$$

$$F_8(A, B) = A \downarrow B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \{(A | A) | (B | B)\} | \{(A | A) | (B | B)\}$$

$$F_{14}(A, B) = A | B$$